Esercitazione 1 - 16-10-2020 (2 ore)

giovedì 15 ottobre 2020 20:15

ESERCIZIO 1 Verificare che ciascuna delle seguenti forme differenziali in $\mathbb{R}^2$ è esatta. Si determini, inoltre, una primitiva di ognuna delle seguenti

(a) $\omega(x,y) = \sin x \, dx + \cos y \, dy$ $\qquad \omega(x,y) = f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy$

(b) $\omega(x,y) = [x^2 y + y^2 + 1]\,dx + \left[\frac{x^3}{3} + 2xy\right] dy$

(c) $\omega(x,y) = (2e^y - y e^x)\,dx + (2x e^y - e^x)\,dy$

(d) $\omega(x,y) = \dfrac{1}{1+y^2}\,dx - \dfrac{2xy}{(1+y^2)^2}\,dy$

Soluzione: (a) Verifichiamo innanzitutto che la forma $\omega(x,y)$ sia CHIUSA.

$$\frac{\partial}{\partial y}(\overbrace{\sin x}^{f_1}) = \frac{\partial}{\partial x}(\overbrace{\cos y}^{f_2}) = 0$$

$\Rightarrow$ ω è CHIUSA in $\mathbb{R}^2$.

* TEO Se A è un aperto di $\mathbb{R}^m$, A semplicemente connesso.

$$(\omega \text{ CHIUSA su } A) \Leftrightarrow (\omega \text{ è ESATTA})$$

Nel nostro caso $A = \mathbb{R}^2$, ma $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso.

$f_1(x,y) = \sin x$, $f_2(x,y) = \cos y$

$U(x,y)$ è tale che $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x} = f_1(x,y)$

$\dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y)$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = \sin x}$$

$$\int \frac{\partial U}{\partial x}(x,y)\,dx = \int \sin x \, dx = -\cos x + c(y)$$

funzione che dipende solo da y

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\cos x + c(y)\right) = \sin x + \cancel{\frac{\partial}{\partial x}(c(y))}$$

devo scrivere esplicitamente $c(y)$)

$$U(x,y) = -\cos x + c(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \frac{dc}{dy}(y) = \cos y \Rightarrow \int c'(y)\,dy = \int \cos y \, dy = \sin y + k$$

$\Rightarrow$ $c(y) = \sin y + k$, $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $U(x,y) = -\cos x + \sin y + k$, $k \in \mathbb{R}$

(c) $\omega(x,y) = (2e^y - ye^x)\,dx + (2xe^y - e^x)\,dy$

Come prima verifico che ω si chiusa in $\mathbb{R}^2$, infatti

$$\frac{\partial}{\partial y}(2e^y - ye^x) = 2e^y - e^x$$
$$\parallel \qquad \Rightarrow \quad \omega \text{ è CHIUSA su } \mathbb{R}^2$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(2xe^y - e^x) = 2e^y - e^x$$

$\overset{\text{TEO *}}{\Rightarrow}$ ω è ESATTA.

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = 2e^y - ye^x$$

$$** \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = 2xe^y - e^x$$

$$\int \frac{\partial U}{\partial x}\,dx = \int (2e^y - ye^x)\,dx = 2xe^y - ye^x + c(y)$$

$$U(x,y) = 2xe^y - ye^x + c(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \cancel{2xe^y} - \cancel{e^x} + c'(y) \overset{**}{=} \cancel{2xe^y} - \cancel{e^x}$$

$\Rightarrow \quad c'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(y) \equiv k, \quad k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad U(x,y) = 2xe^y - ye^x + k, \quad k \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO 2 Determinare il parametro reale α in modo che la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx + \frac{x+y}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dy$$

sia chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Per tali valori di α discuterne l'esattezza.

Soluzione

$$\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{-(x^2+y^2)^\alpha - (x-y)\,\alpha\,(x^2+y^2)^{\alpha-1}\cdot 2y}{(x^2+y^2)^{2\alpha}} = (x^2+y^2)^{\alpha-1}\,\frac{-x^2-y^2-2\alpha y(x-y)}{(x^2+y^2)^{2\alpha}}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^\alpha - (x+y)\,\alpha\,(x^2+y^2)^{\alpha-1}\cdot 2x}{(x^2+y^2)^{2\alpha}} = (x^2+y^2)^{\alpha-1}\,\frac{x^2+y^2-2\alpha x(x+y)}{(x^2+y^2)^{2\alpha}}$$

$\Rightarrow$ affinché ω sia chiusa deve risultare che

$$-x^2-y^2-2\alpha y(x-y) = x^2+y^2-2\alpha x(x+y)$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2+2y^2+2\alpha y(x-y)-2\alpha x(x+y)=0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{2x^2}+2y^2+\cancel{2\alpha xy}-2\alpha y^2-\underline{2\alpha x^2}-\cancel{2\alpha xy}=0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2(1-\alpha)+2y^2(1-\alpha)=0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = 1$$

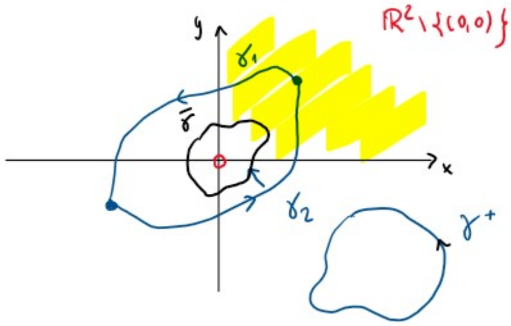
ω è CHIUSA in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \Leftrightarrow \alpha=1$.

(Se $\alpha\neq 1 \Rightarrow \omega$ non è chiusa $\Rightarrow \omega$ non è esatta)

II caso $\alpha=1$

$$\omega(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy \quad \text{in } A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso



$$\int_{\gamma^+}\omega = 0$$

$\int_{\bar\gamma^+}\omega = 0$? Se $\exists\ \bar\gamma$ (curva chiusa contenente $(0,0)$ al suo interno) tale che $\int_{\bar\gamma^+}\omega\neq 0 \Rightarrow \omega$ non è esatta.

$$\bar\gamma^+ = \partial B_1(0)^+ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$$

$$\partial B_1^+(0): [0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (\underset{x(t)}{\cos t}, \underset{y(t)}{\sin t})$$

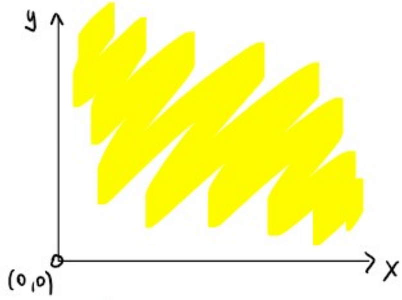
$$\int_{\partial B_1^+(0)}\omega = \int_0^{2\pi} f_1(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt+\int_0^{2\pi} f_2(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[(\cos t-\sin t)\cdot(-\sin t)+(\cos t+\sin t)\cdot\cos t\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big(-\cancel{\sin t\cos t}+\overbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}^{=1}+\cancel{\sin t\cos t}\Big)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}dt = 2\pi\neq 0 \Rightarrow \omega \text{ non è ESATTA in } \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

DOMANDA ω è esatta nell'insieme $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y>0\}$?
In caso affermativo $\exists\ U(x,y)$?



$\omega(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy$ in A

esposito@mat.unical.it

ESERCIZIO 3 Sia $\vec{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ dove

$$P(x,y) = \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2 y}$$

$$Q(x,y) = \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)}{xy^2}$$

$\rightarrow \omega(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

in $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y>0\}$

(i) Mostrare che il campo è CONSERVATIVO e trovarne i potenziali

(ii) Calcolare $\int_{\gamma^+} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ dove $\gamma : [0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t+\cos^2 t,\ 1+\sin^2 t)$

Soluzione (i)

$$P(x,y) = \left(\frac{3}{y} - \frac{y}{x^2}\right)(x^2+y^2)$$

$$Q(x,y) = \left(\frac{3}{x} - \frac{x}{y^2}\right)(x^2+y^2)$$

IRROTAZIONALE $\leftrightarrow$ CHIUSURA

CONSERVATIVO $\leftrightarrow$ ESATTEZZA

Come si dimostra che $\vec{F}$ è conservativo? SI

Verifichiamo che $\vec{F}$ sia IRROTAZIONALE:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

ESERCIZIO!

$$\int \underbrace{P(x,y)}_{=\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)}\,dx = \int \left(\frac{3}{y} - \frac{y}{x^2}\right)(x^2+y^2)\,dx = \int \frac{3x^2}{y} - y + 3y - \frac{y^3}{x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{3x^2}{y} + 2y - \frac{y^3}{x^2}\,dx = \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x} + c(y) = U(x,y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \cancel{-\frac{x^3}{y^2}} + \cancel{2x} + \cancel{\frac{3y^2}{x}} + c'(y) = \left(\frac{3}{x} - \frac{x}{y^2}\right)(x^2+y^2) = \cancel{2x} - \cancel{\frac{x^3}{y^2}} + \cancel{\frac{3y^2}{x}}$$

$\Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) \equiv k,\ k\in\mathbb{R}$

$$U(x,y) = \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x} + k, \quad k\in\mathbb{R}.$$

(ii) $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$\gamma(t) = (t + \cos^2 t \,,\, 1 + \sin^2 t)$

$\gamma(0) = (1,1)$
$\neq$
$\gamma(2\pi) = (2\pi + 1, 1)$
$\Downarrow$
γ non è CHIUSA

$d\vec{r} = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\, dt$

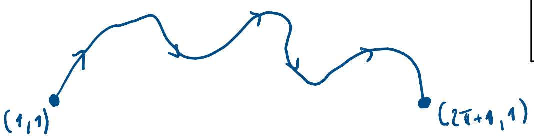
$$= \int_0^{2\pi} \langle \vec{F}(x(t), y(t)) \,,\, \gamma'(t) \rangle \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle \big(P(x(t), y(t)) \,,\, Q(x(t), y(t)) \big) \,,\, (1 - 2\sin t \cos t \,,\, 2 \sin t \cos t) \rangle \, dt \ \ldots$$

Procedimento molto lungo per CAMPO CONSERVATIVO

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\gamma(2\pi)) - U(\gamma(0)) = U(2\pi + 1, 1) - U(1,1)$$

$$\boxed{U(x,y) = \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x}}$$



Esercitazione 2 - 19-10-2020 (2 ore)

domenica 18 ottobre 2020 21:06

ESERCIZIO 1 (per casa) Dimostrare che la forma differenziale in $\mathbb{R}^3$

$$\omega(x,y,z) = \left(e^x \cos y + yz\right) dx + \left(xz - e^x \sin y\right) dy + xy\, dz$$

è esatta e determinarne una primitiva.

Richiamo: • $\omega \in \mathcal{C}^1(E)$ si dice ESATTA se $\exists\, U \in \mathcal{C}^2(E)$ t.c. $E \subset \mathbb{R}^n$.

$$dU = \omega \qquad (U \text{ è detta funzione potenziale})$$

• $\vec{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ si dice CONSERVATIVO se $\exists\, U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ t.c.

$$\nabla U = \vec{F} \qquad (U \text{ è detta funzione potenziale})$$

ESERCIZIO 2 (De Maso - Mariconda) Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ dato da

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\underline{X(x,y,z)},\ x^2+2yz,\ y^2-z^2\right)$$

(dove $X \in \mathcal{C}^1$)

(i) Dimostrare che esistono funzioni $X \in \mathcal{C}^1$ che rendono $\vec{F}$ conservativo; trovare tutte le possibili funzioni in questione.

(ii) Dimostrare che $\exists!\ X$ come nel quesito (i) che per di più è identicamente nulla sull'asse x; determinarla.

(iii) Determinare i potenziali di $\vec{F}$ con X come in (ii).

Soluzione: (i) $\vec{F} = \left(X,\ x^2+2yz,\ y^2-z^2\right)$

Il dominio di $\vec{F}$ è $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso)

$$\left(\vec{F} \text{ cons. in } \mathbb{R}^3\right) \Leftrightarrow \left(\vec{F} \text{ è irrotazionale in } \mathbb{R}^3\right)$$

↳ tradotto $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$

$\hat{\imath} = (1,0,0)$

$$\nabla \times \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & x^2+2yz & y^2-z^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(y^2-z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2+2yz),\ -\frac{\partial}{\partial x}(y^2-z^2) + \frac{\partial}{\partial z}X,\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2+2yz) - \frac{\partial}{\partial y}X\right)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \mathrm{rot}(\vec{F}) = \left(2y - 2y,\ 0 + X_z,\ 2x - X_y\right)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ X_z \\ 2x - X_y \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{imponiamo} \\ \text{per avere } \vec{F} \\ \text{irrotazionale}}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

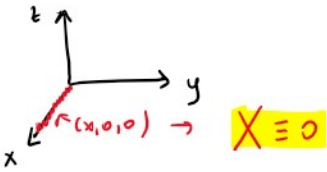
$$\begin{cases} X_z \equiv 0 & \Rightarrow \quad X(x,y,z) = \phi(x,y) \\ 2x - X_y \equiv 0 & \Rightarrow \quad X_y(x,y,z) = 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad X(x,y,z) = \int X_y(x,y,z)\,dy$$

$$= \int 2x\,dy = 2xy + \alpha(x, \cancel{z})$$

$$\boxed{X(x,y,z) = \phi(x,y) = 2xy + \alpha(x)}, \quad \text{dove } \alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$

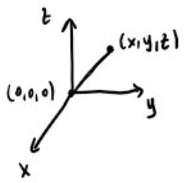
(ii) $X(x,0,0) \equiv 0$



$$X(x,0,0) = 2\cancel{x}\cdot 0 + \alpha(x) \equiv 0 \iff \alpha \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad X(x,y,z) = 2xy$$

(iii) $\vec{F}(x,y,z) = \left(2xy,\ x^2 + 2yz,\ y^2 - z^2\right)$



$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto (tx, ty, tz)$$

$$\gamma(t) = (tx, ty, tz)$$

$$U(x,y,z) = \int_\gamma \omega = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \langle \vec{F}(x(t), y(t), z(t)), \gamma'(t) \rangle\, dt$$

$$= \int_0^1 \langle \left(2t^2xy,\ t^2x^2 + 2t^2yz,\ t^2y^2 - t^2z^2\right), (x,y,z) \rangle\, dt$$

$$= \int_0^1 2t^2\underline{x^2y} + t^2\underline{x^2y} + 2t^2y^2z + t^2y^2z - t^2z^3\, dt$$

$$= \int_0^1 2t^2 \underline{x^2 y} + \underline{t^2 x^2 y} + 2t^2 y^2 z + t^2 y^2 z - t^2 z^3 \, dt$$

$$= \int_0^1 t^2 \left[3x^2 y + 3y^2 z - z^3 \right] dt = \left(3x^2y + 3y^2 z - z^3\right) \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow U(x,y,z) = x^2 y + y^2 z - \frac{z^3}{3} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

ESERCIZIO 3 Trovare i numeri reali a, b tali che il campo

$$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F(x,y) = \left(\frac{y^2 + 2xy + \overset{-1}{a}x}{(x^2+y^2)^2}, - \frac{x^2 + 2xy + \overset{-1}{b}y^2}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

sia conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Trovare poi i potenziali del campo.

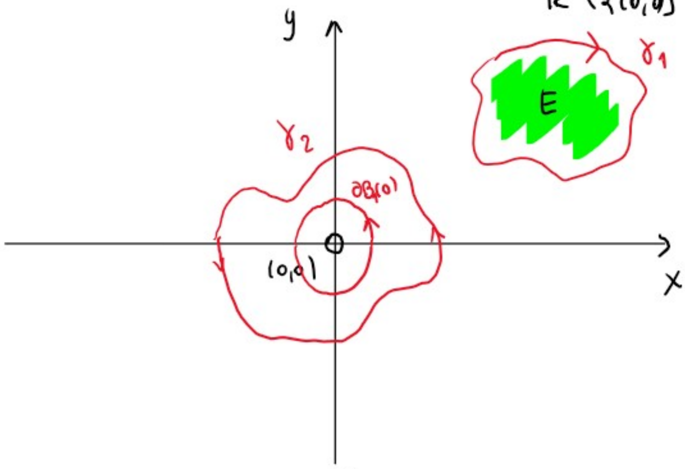
<u>Soluzione</u>: Affinché $\vec{F}$ sia conservativo, sicuramente devo mostrare che $\vec{F}$ è irrotazionale.

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2 + 2xy + ax}{(x^2+y^2)^2} \right) = \frac{(2y+2x)(x^2+y^2)^2 - 2(y^2+2xy+ax)(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \; \ldots \qquad \Rightarrow \quad a = b = -1$$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso.



$$\int_{\gamma_1^+} \omega = 0$$

$$\int_{\gamma_2^+} \omega = \int_{\partial B_1^+(0)} \omega = 0 \; ?$$

$$\partial B_1(0)^+ : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (\cos t, \sin t)$$

$$\int_{\partial B_1^+(0)} \omega = \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{\sin^2 t + 2\cos t \sin t - \cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, - \frac{\cos^2 t + 2\cos t \sin t - \sin^2 t}{1} \right), (-\sin t, \cos t) \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^3 t - 2\cos t \sin^2 t + \sin t \cos^2 t - \cos^3 t - 2\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t \, dt = \ldots \quad \text{(Per casa)}.$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^3 t - 2\cos t \sin^2 t + \sin t \cos^2 t - \cos^3 t - 2\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t \; dt = \dots \quad (\text{Per casa}).$$

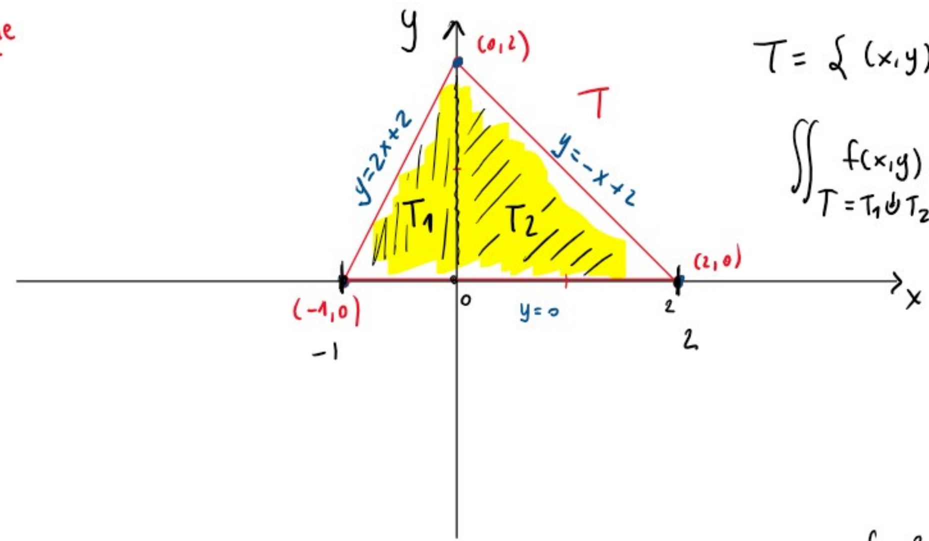
ESERCIZI SU INTEGRALI MULTIPLI

ESERCIZIO 1 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{y}{1+x} \, dx dy$$

dove T è il triangolo di vertici $(-1,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$.

Soluzione



$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; --- \}$$

$$\iint_{T = T_1 \cup T_2} f(x,y) \, dx dy = \iint_{T_1} f(x,y) \, dx dy + \iint_{T_2} f(x,y) \, dx dy$$

1. Retta passante per $(0,2)$, $(2,0)$:

$$y = mx + q \rightarrow \begin{cases} 2 = 0 \cdot m + q & \leftarrow (0,2) \\ 0 = 2m + q & \leftarrow (2,0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ m = -1 \end{cases} \Rightarrow y = -x + 2$$

2. Retta passante per $(-1,0)$, $(0,2)$

$$\rightarrow y = mx + q \rightarrow \begin{cases} 0 = -m + q \Rightarrow m = 2 \\ 2 = 0 + q \Rightarrow q = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 2x + 2$$

$$T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 2, \quad 0 < y < -x + 2\} \quad y\text{-semplici}$$

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 2, \quad 0 < y < -x+2\} \quad y\text{-semplice}$$

$$\overset{T_1}{\cup} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 0, \quad 0 < y < 2x+2\} \quad y\text{-semplice}$$

$$\iint_T \frac{y}{1+x}\,dx\,dy = \underbrace{\iint_{T_1} \frac{y}{1+x}\,dx\,dy}_{=1} + \underbrace{\iint_{T_2} \frac{y}{1+x}\,dx\,dy}_{=-4+\frac{9}{2}\ln 3}$$

$$\iint_{T_1} \frac{y}{1+x}\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\left(\int_0^{2x+2} \frac{y}{1+x}\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{1+x}\int_0^{2x+2} y\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2x+2} dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+x}\left(\frac{(2x+2)^2}{2} - 0\right) = \int_{-1}^{0} \frac{\cancel{2}(x+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{x+1}}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} 2(x+1)\,dx = \left[(x+1)^2\right]_{-1}^{0} = 1$$

$$\iint_{T_2} \frac{y}{1+x}\,dx\,dy = \int_0^2\left(\int_0^{-x+2} \frac{y}{1+x}\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^2\left(\frac{1}{1+x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{-x+2}\right)dx = \int_0^2 \frac{(-x+2)^2}{2(x+1)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{(x-2)^2}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{\cancel{(x+1)}(x-5)}{\cancel{x+1}} + \frac{9}{x+1}\,dx \overset{*}{=}$$

(2) $\qquad x^2 - 4x + 4 \mid x+1$

$$\int_0 \quad x+1 \qquad\qquad \int_0 \quad x+1 \qquad x+1$$

$$\int \frac{(x-2)^2}{x+1}\,dx \rightarrow \quad \begin{array}{l|l} x^2-4x+4 & x+1 \\ \underline{x^2+x} & x-5 \\ // \ -5x+4 & \\ \underline{-5x-5} & \\ // \ 9 & \end{array} \quad \Rightarrow \ (x-1)^2 = (x+1)(x-5)+9$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{2}\left[\int_0^2 x-5\,dx + \int_0^2 \frac{9}{x+1}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x-5)^2}{2} + 9\ln|x+1|\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} + 9\ln 3 - \frac{25}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-8+9\ln 3\right) = -4 + \frac{9}{2}\ln 3$$

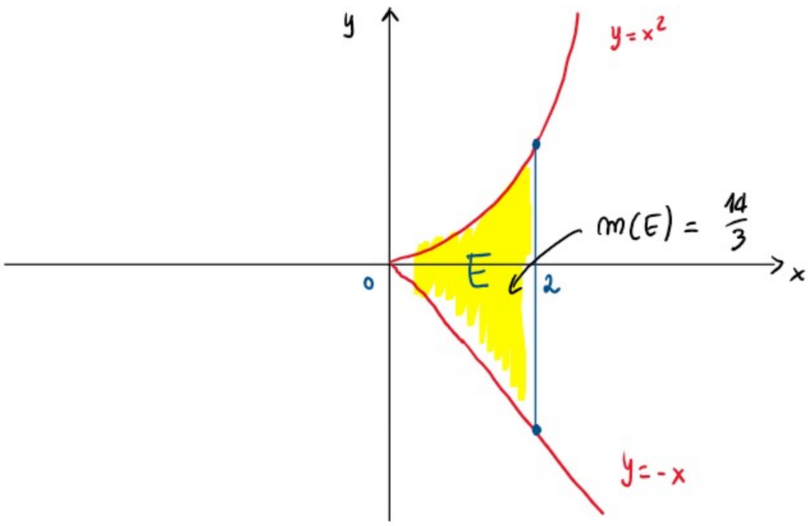
$$\Rightarrow \iint_T f(x,y)\,dx\,dy = 1 - 4 + \frac{9}{2}\ln 3 = -3 + \frac{9}{2}\ln 3$$

ESERCIZIO 2 Calcolare la misura (secondo Peano-Jordan) del seguente insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 \ , \ -x \le y \le x^2\}$$

$$\left[\ m(E) = \iint_E dx\,dy\ \right]$$

Soluzione:



$$\iint_E dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{-x}^{x^2} dy\right) dx = \int_0^2 [y]_{-x}^{x^2}\,dx = \int_0^2 x^2+x \ dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{8+6}{3} = \frac{14}{3}$$

ESERCIZI (per casa)

1. $\displaystyle\iint_T xy\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,\sqrt{3})$

2. $\displaystyle\iint_D x^2 + \sin y$, dove $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$

Esercitazione 3 - 30-10-2020 (2 ore)

venerdì 30 ottobre 2020 11:33

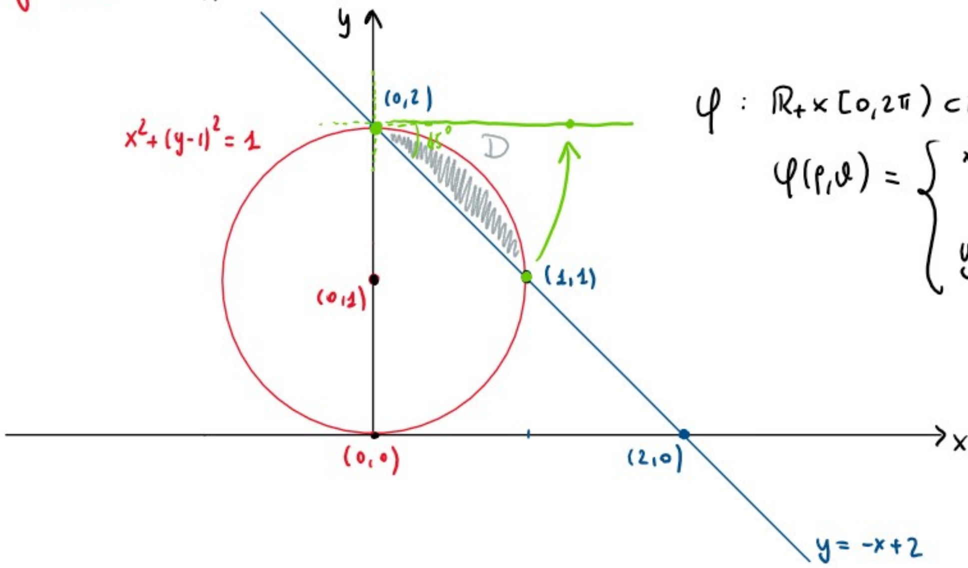
ESERCITAZIONE SU INTEGRALI MULTIPLI

ESERCIZIO 1 Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D x \, dx\, dy$$

dove $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 \le 1 \, , \, y + x \ge 2 \}$.

Svolgimento: Rappresentiamo il dominio D.



$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(\rho, \vartheta) = \begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = 2 + \rho \sin\vartheta \end{cases}$$

Cerchiamo di capire come si trasforma il dominio D sotto l'azione della mappa φ^{-1}.

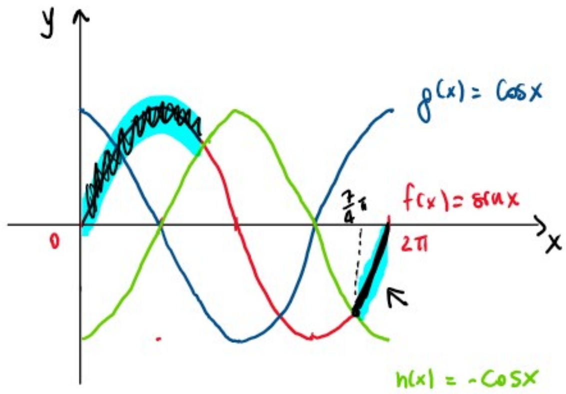
$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \boxed{\iint_{\varphi^{-1}(D)} f(x(\rho,\vartheta), y(\rho,\vartheta)) \, |\det J\varphi(\rho,\vartheta)| \, d\rho\, d\vartheta}$$

Poiché $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = 2 + \rho\sin\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2\cos^2\vartheta + (2 + \rho\sin\vartheta - 1)^2 \le 1 \\ \cancel{2} + \rho\sin\vartheta + \rho\cos\vartheta \ge \cancel{2} \end{cases}$

$(\rho, \vartheta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^2\cos^2\vartheta + (1 + \rho\sin\vartheta)^2 \le 1 \\ \sin\vartheta \ge -\cos\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2 + 2\rho\sin\vartheta + \cancel{1} \le \cancel{1} \\ \sin\vartheta \ge -\cos\vartheta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho(\rho + 2\sin\vartheta) \le 0 & \Leftrightarrow & \boxed{0 \le \rho \le -2\sin\vartheta} \\ \sin\vartheta \ge -\cos\vartheta & \Leftrightarrow & \vartheta \in \left[2\pi - \frac{\pi}{4}, 2\pi\right) = \left[\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right) \end{cases}$$



$$\boxed{f(x) \geq h(x)}$$

$$\sin x = -\cos x$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = 2 + \rho \sin\vartheta \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin\vartheta \geq -\cos\vartheta \\ -2\sin\vartheta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \sin\vartheta \leq 0$$

$$\left|\det J\varphi(\rho,\vartheta)\right| = \left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho,\vartheta) & \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho,\vartheta) \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta}(\rho,\vartheta) & \frac{\partial y}{\partial \vartheta}(\rho,\vartheta) \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\rho\sin\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{matrix} \right|$$

$$= \left|\rho\cos^2\vartheta + \rho\sin^2\vartheta\right| = |\rho| = \rho > 0$$

$$\boxed{\iint_D x \, dx\,dy} = \int_{\frac{7}{4}\pi}^{2\pi} \left(\int_0^{-2\sin\vartheta} \rho^2 \cos\vartheta \, d\rho \right) d\vartheta$$

$$= \int_{\frac{7}{4}\pi}^{2\pi} \cos\vartheta \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{-2\sin\vartheta} d\vartheta = \int_{\frac{7}{4}\pi}^{2\pi} \cos\vartheta \left(-\frac{8}{3}\sin^3\vartheta\right) d\vartheta$$

$$= -\frac{2}{3}\int_{\frac{7}{4}\pi}^{2\pi} 4\sin^3\vartheta\cos\vartheta \, d\vartheta = -\frac{2}{3}\left[\sin^4\vartheta\right]_{\frac{7}{4}\pi}^{2\pi}$$

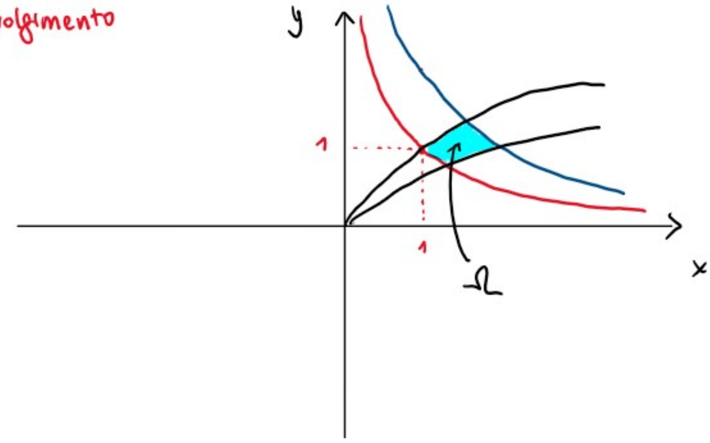
$$= -\frac{2}{3}\left(0 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4\right) = -\frac{\cancel{2}^{\,1}}{3}\left(-\frac{1}{\cancel{4}_{\,2}}\right) = \boxed{\frac{1}{6}}$$

ESERCIZIO 2 Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_\Omega \log\left(\frac{x}{y^2}\right) dx\,dy$$

dove $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{4}x < y^2 < x \;,\; 1 < xy < 2 \right\}$

Svolgimento



Come individuo il cambio di variabile corretto?

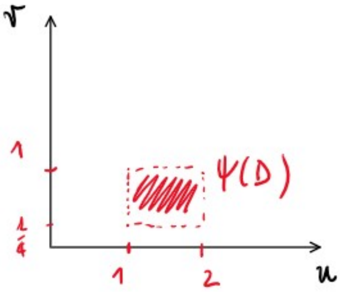
Osserviamo che $x, y > 0$ (I quadrante)

$$\psi(x,y) = \begin{cases} u(x,y) = xy \\ v(x,y) = \dfrac{y^2}{x} \end{cases}, \quad (x,y) \in \Omega$$

$$J\psi(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -\dfrac{y^2}{x^2} \\ x & 2\dfrac{y}{x} \end{bmatrix}$$

$$|\det J\psi(x,y)| = \left| 2\frac{y^2}{x} + \frac{y^2}{x} \right| = 3 \underbrace{\frac{y^2}{x}}_{= v(x,y)} = 3v \Rightarrow |\det J\psi^{-1}| = \frac{1}{3v}$$

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\psi(D)} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |\det J\psi^{-1}|\, du\, dv$$



$$\psi(D) = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 < u < 2, \; \frac{1}{4} < v < 1 \right\}$$

$$\iint_{[1,2]\times[\frac{1}{4},1]} 1 \cdot \log\left(\frac{1}{v}\right) \cdot \frac{1}{3v}\, du\, dv = \left(\overbrace{\int_1^2 du}^{= 1} \right) \left(\int_{\frac{1}{4}}^{1} \log\left(\frac{1}{v}\right) \cdot \frac{1}{3v}\, dv \right)$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{\frac{1}{4}}^{1} \log v \cdot \frac{1}{v}\, dv = -\frac{1}{3} \left[\frac{\log^2 v}{2} \right]_{\frac{1}{4}}^{1} = -\frac{1}{3} \left[-\frac{\log^2 \frac{1}{4}}{2} \right]$$

$$= -\frac{1}{3} \left[-\frac{1}{2} (\log 1 - \log 4)^2 \right] = \frac{1}{6} \cdot \log^2 4$$

ESERCIZI ⓐ Calcolare le misure dei seguenti domini limitati di $\mathbb{R}^2$: $\left(\Leftrightarrow m(D) = \iint_D dxdy \right)$

(1) $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 < xy < 2 \,,\; \frac{x}{2} < y < 2x \right\}$

(2) $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y+2x \leq 1 \,,\; x^2 \leq y \leq x^2+1 \right\}$

(3) Ω è il dominio delimitato dalle seguenti curve

$$x^2+y^2 = 2x \,,\quad x^2+y^2 = 4x \,,\quad y = x \,,\quad y = 0$$

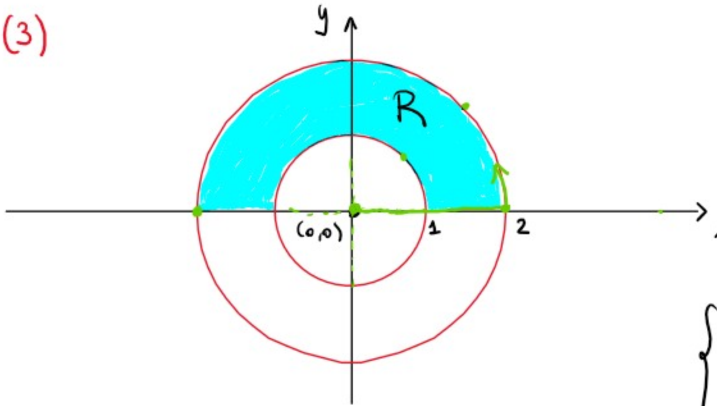
ESERCIZI ⓑ Calcolare i seguenti integrali doppi :

(1) $\iint_D \frac{1}{x^2 y}\, dx\, dy \,,\quad D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x>0,\; 2x \leq y \leq 3x,\; 2x \leq 1-y \leq 4x \right\}$

(2) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy \,,\quad D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x>0, y<0 ,\; x^2+y^2 \geq \frac{1}{4} ,\; x < 1+y \right\}$

(3) $\iint_R \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy \,,\quad R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \,,\; y \geq 0 \right\}$

Svolgimento ⓑ (3)



Cambiare variabile ?

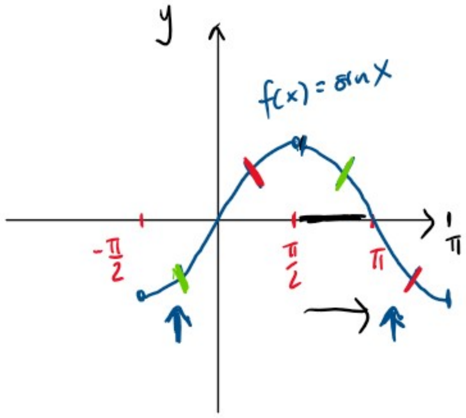
$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\vartheta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq \rho^2 \leq 4 & \Leftrightarrow \quad 1 \leq \rho \leq 2 \\ \rho \sin\vartheta \geq 0 & \Leftrightarrow \quad \vartheta \in [0,\pi] \end{cases}$$

$$\iint_{[1,2]\times[0,\pi]} \arcsin\left(\frac{\cancel{\rho} \sin\vartheta}{\cancel{\sqrt{\rho^2}}} \right) \cdot \rho \; d\rho \, d\vartheta = \int_1^2 \rho \left(\int_0^\pi \arcsin(\sin\vartheta)\, d\vartheta \right) d\rho$$

$$= \int_1^2 \rho \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\sin\vartheta)\, d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \arcsin(\sin\vartheta)\, d\vartheta \right] d\rho$$

dove posso invertire $f(x) = \operatorname{sen} x$?



$$= \int_1^2 \rho \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta \, d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - \vartheta) \, d\vartheta \right] d\rho$$

$$= \int_1^2 \rho \left\{ \left(\frac{\vartheta^2}{2} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{(\pi - \vartheta)^2}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right\} d\rho$$

$$= \int_1^2 \rho \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2} \right) d\rho$$

$$= \int_1^2 \rho \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} \right) d\rho = \frac{\pi^2}{4} \int_1^2 \rho \, d\rho = \frac{\pi^2}{4} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_1^2 = \frac{\pi^2}{8} \cdot [4 - 1] = \frac{3}{8} \pi^2$$

Esercitazione 4 - 02-11-2020 (2 ore)

lunedì 2 novembre 2020 09:33

ESERCIZI SU INTEGRALI TRIPLI

ESERCIZIO 1 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_H e^y \sqrt{x^2-z^2}\, dx\, dy\, dz$$

dove $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^3\}$

Svolgimento Osserviamo che il dominio H è normale (o semplice) rispetto al piano x, y.

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in A,\ 0 \le z \le x\}$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^3\}$$

$$\iiint_H e^y \sqrt{x^2-z^2}\, dx\, dy\, dz = \iint_A \left(\int_0^x e^y \sqrt{x^2-z^2}\, dz \right) dx\, dy$$

$$= \iint_A e^y \left(\int_0^x \sqrt{x^2-z^2}\, dz \right) dx\, dy \overset{*}{=} \iint_A e^y \left(\int_0 \sqrt{x^2-x^2\sin^2 t} \cdot x \cos t\, dt \right) dx\, dy$$

*

$$\int \sqrt{x^2-z^2}\, dz$$

SOSTITUZIONE

$z = x \sin t$

$dz = x \cos t\, dt$

$$= \iint_A e^y \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dt \right) dx\, dy$$

$$= \iint_A e^y \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 t\, dt \right) dx\, dy$$

$$= \iint_A e^y x^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt \right) dx\, dy =$$

**

$$\int \cos^2 t\, dt = \frac{\sin t \cos t + t}{2} + c$$

$$\overset{**}{=} \iint_A e^y x^2 \left[\frac{\sin t \cos t + t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dx\, dy =$$

$$= \iint_A e^y x^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) dx\, dy = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \left(\int_0^{x^3} e^y x^2\, dy \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^1 x^2 \left[e^y \right]_0^{x^3} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^1 x^2 \left(e^{x^3} - 1 \right) dx = \frac{\pi}{4} \left(\int_0^1 x^2 e^{x^3}\, dx - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 x^2\, dx \right) = \frac{\pi}{4} \left[\left(\frac{e^{x^3}}{3} \right)_0^1 - \left(\frac{x^3}{3} \right)_0^1 \right] = \frac{\pi}{4} \left(\frac{e}{3} - 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{12}(e-2)$$

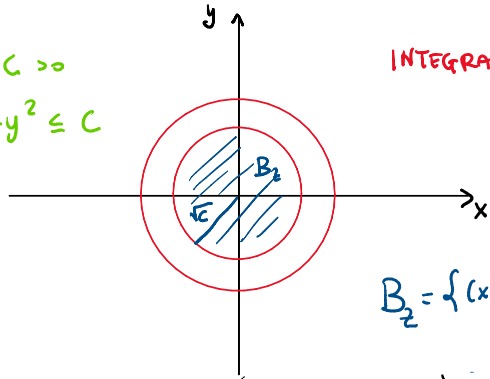
ESERCIZIO 2 Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_C x^2 (2-z)\, dx\, dy\, dz$$

dove $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 2,\ x^2+y^2 \le z\}$

Svolgimento $\quad z = c > 0$

$x^2+y^2 \le c$



INTEGRAZIONE PER STRATI

$B_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \le z\}$

$$\iiint_C x^2(2-z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 \left(\iint_{B_z} x^2(2-z)\,dx\,dy\right) dz = \int_0^2 (2-z)\left(\iint_{B_z} x^2\,dx\,dy\right) dz \overset{*}{=}$$

Risolviamo

$$\iint_{B_z} x^2\,dx\,dy \underset{\uparrow}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{z}} \rho^2\cos^2 t\cdot\rho\,d\rho\right) dt = \int_0^{2\pi}\cos^2 t\left(\int_0^{\sqrt{z}}\rho^3\,d\rho\right) dt$$

$\begin{cases} x = \rho\cos t \\ y = \rho\sin t \end{cases} \quad \rho\in[0,\sqrt{z}], \quad t\in[0,2\pi)$

$$= \int_0^{2\pi}\cos^2 t\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{z}} dt = \int_0^{2\pi}\cos^2 t\left(\frac{z^2}{4}\right) dt = \frac{z^2}{4}\left[\frac{\sin t\cos t + t}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{z^2}{4}(\pi) = \frac{\pi}{4}z^2$$

$$\overset{*}{=} \int_0^2 (2-z)\frac{\pi}{4}z^2\,dz = \frac{\pi}{4}\left(\int_0^2 2z^2\,dz - \int_0^2 z^3\,dz\right) = \frac{\pi}{4}\left(\left[\frac{2z^3}{3}\right]_0^2 - \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^2\right)$$

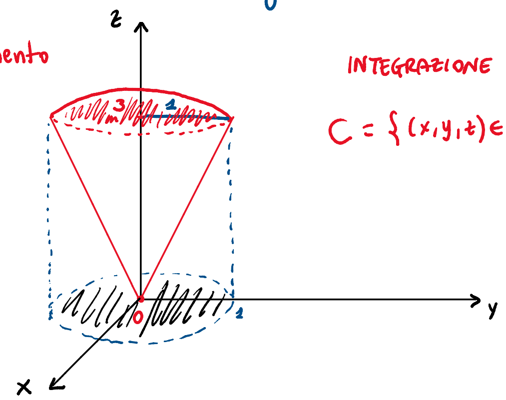
$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{16}{3}-\frac{16}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2^6-2^4\cdot 3}{12} = \frac{\pi}{\cancel{4}\,2}\cdot\frac{2^{\cancel{4}\,2}(2^2-3)}{\cancel{12}\,\cancel{6}\,3} = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{\pi}{3}$$

ESERCIZIO 3 $\quad$ Dati $a,b>0$ calcolare

$$\iiint_C az+b \quad dx\,dy\,dz$$

dove C è un cono di altezza 3, raggio di base 1, avente il vertice nell'origine e l'altezza lungo il semiasse $z\ge 0$.

Svolgimento



INTEGRAZIONE PER FILI

$C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 1, \ 3\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 3\}$

$$\iiint_C az+b \; dx\,dy\,dz = \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} \left(\int_{3\sqrt{x^2+y^2}}^{3} az+b \; dz \right) dx\,dy$$

$$= \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} \left[\frac{az^2}{2} + bz \right]_{3\sqrt{x^2+y^2}}^{3} dx\,dy = \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} \frac{9}{2}a + 3b - \frac{9}{2}a\left(x^2+y^2\right) - 3b\sqrt{x^2+y^2}\; dx\,dy$$

$$= \iint_{B_1(0)} \frac{9}{2}a\left(1-(x^2+y^2)\right) + 3b\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy \overset{\text{POLARI}}{=} \int_0^1\int_0^{2\pi} \left[\frac{9}{2}a\left(1-\rho^2\right) + 3b\left(1-\rho\right)\right]\rho \; d\vartheta\, d\rho$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right)\left(\int_0^1 \frac{9}{2}a\rho - \frac{9}{2}a\rho^3 + 3b\rho - 3b\rho^2 \; d\rho\right) = 2\pi\left[\frac{9}{4}a\rho^2 - \frac{9}{8}a\rho^4 + \frac{3}{2}b\rho^2 - b\rho^3\right]_0^1$$

$$= 2\pi\left(\frac{9}{4}a - \frac{9}{8}a + \frac{3}{2}b - b\right) = \boxed{\pi\left(\frac{9}{4}a + b\right)}$$

ESERCIZI SUL CAMBIO DI VARIABILE IN $\mathbb{R}^3$

ESERCIZIO 1 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_{B_R(0)} \frac{|y|\,e^{-z}}{\sqrt{x^2+y^2}}\; dx\,dy\,dz$$

ESERCIZIO 2 Calcolare il volume dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2\le R^2,\; 0\le z\le h\,e^{-\sqrt{x^2+y^2}/R} \right\}$$

dove $h, R>0$.

ESERCIZIO 3 Calcolare il volume dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2\le R^2,\; x\ge 0,\; y\ge 0,\; z\ge 0 \right\}$$

dove $R>0$.

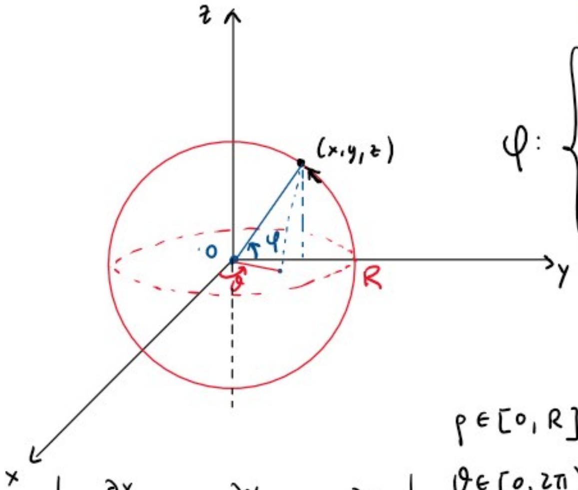
ESERCIZIO 4 (*) Calcolare

$$\iiint_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}}\; dx\,dy\,dz$$

dove $E = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \le 1 \right\}$ ← Cambiare sistema di riferimento rotazione degli assi x e y.

Svolgimento esercizio 1
$$\iiint_{B_R(0)} \frac{|y|\,e^{-z}}{\sqrt{x^2+y^2}}\; dx\,dy\,dz$$

$$B_R(0) = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 < R^2 \right\}$$



COORDINATE SFERICHE

$$\varphi : \begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

es.
$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2$$

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\rho,\vartheta,\varphi) \longrightarrow (x,y,z)$$

$\rho \in [0, R]$

$\vartheta \in [0, 2\pi)$

$\varphi \in [0, \pi]$

$$|\det J\varphi| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

$$= \left| \begin{array}{ccc|cc} \sin\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta & \cos\varphi & \sin\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta \\ -\rho\sin\varphi\sin\vartheta & \rho\sin\varphi\cos\vartheta & 0 & -\rho\sin\varphi\sin\vartheta & \rho\sin\vartheta\cos\vartheta \\ \rho\cos\varphi\cos\vartheta & \rho\cos\varphi\sin\vartheta & -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi\cos\vartheta & \rho\cos\varphi\sin\vartheta \end{array} \right|$$

$$= \left| +\rho^2 \sin^3\varphi \cos^2\vartheta + \rho^2 \sin\varphi \cos^2\varphi \sin^2\vartheta + \rho^2 \sin\varphi \cos^2\varphi \cos^2\vartheta + \rho^2 \sin^3\varphi \sin^2\vartheta \right|$$

$$= \rho^2 |\sin\varphi| \left| \sin^2\varphi \cos^2\vartheta + \cos^2\varphi \sin^2\vartheta + \cos^2\varphi \cos^2\vartheta + \sin^2\varphi \sin^2\vartheta \right|$$

$$= \rho^2 |\sin\varphi| \left| \cos^2\varphi \underbrace{(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)}_{=1} + \sin^2\varphi \underbrace{(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)}_{=1} \right|$$

$$= \rho^2 |\sin\varphi| \, |\cos^2\varphi + \sin^2\varphi| = \rho^2 |\sin\varphi| = \rho^2 \sin\varphi$$

Per le coordinate sferiche $|\det J\varphi| = \rho^2 \sin\varphi$

$$\underset{B_R(0)}{\overset{\mathbb{R}^3}{\cup\!\!\!\!\!\;|}} \xrightarrow{\varphi^{-1}} \underset{[0,R]\times[0,2\pi)\times[0,\pi)}{\overset{\mathbb{R}^3}{\cup\!\!\!\!\!\;|}}$$

$x^2+y^2+z^2 \le R^2$ $\qquad$ $0 \le \rho \le R, \ \vartheta \in [0, 2\pi), \ \varphi \in [0, \pi)$

$$\iiint_{B_R(0)} \frac{|y|\, e^{-z}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\rho \sin\varphi \sin\vartheta|\; e^{-\rho\cos\varphi}}{\sqrt{\rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\vartheta + \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta}}\, \rho \sin\varphi \; d\varphi\, d\vartheta\, d\rho$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho \sin\varphi \; |\sin\vartheta| \; e^{-\rho\cos\varphi}}{\cancel{\sqrt{\rho^2 \sin^2\varphi}}} \cdot \rho^{\cancel{2}} \cancel{\sin\varphi} \; d\varphi\, d\vartheta\, d\rho$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} |\sin\vartheta|\, d\vartheta \right) \left(\int_0^R \left(\int_0^{\pi} \rho^2 \sin\varphi\, e^{-\rho\cos\varphi}\, d\varphi \right) d\rho \right) =$$

$$= 4 \int_0^R \rho \left(\int_0^{\pi} \underbrace{\rho \sin\varphi}_{f'(\varphi)} \; \underbrace{e^{-\rho\cos\varphi}}_{e^{f(\varphi)}} \, d\varphi \right) d\rho$$

$$= 4 \int_0^R \rho \left[e^{-\rho\cos\varphi} \right]_0^{\pi} d\rho$$

$$= 4 \int_0^R \rho \left[e^{\rho} - 1 \right] d\rho = 4 \left(\int_0^R \rho e^{\rho}\, d\rho - \int_0^R d\rho \right)$$

$$= 4 \left(\left[\rho e^{\rho}\right]_0^R - \int_0^R e^{\rho}\, d\rho - R \right) = 4 \left(R e^R - e^R - R \right)$$

Esercitazione 5 - 09-11-2020 (2 ore)

lunedì 9 novembre 2020 10:02

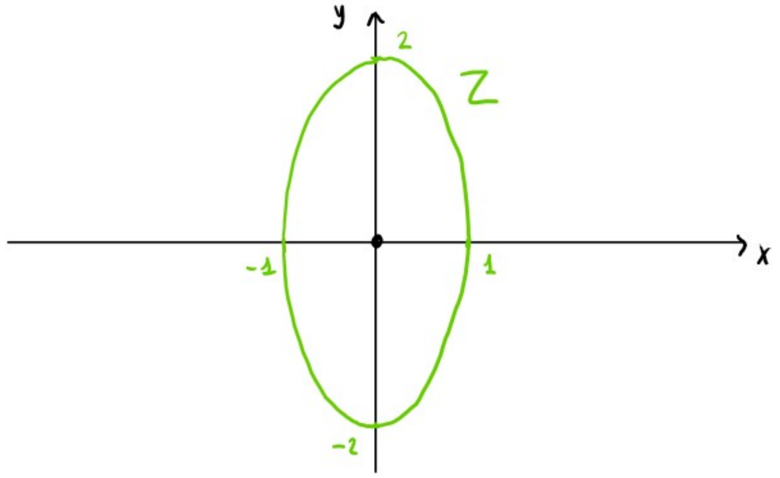
ESERCITAZIONE SU MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

ESERCIZIO 1 Calcolare i valori ed i punti di massimo e di minimo assoluti delle funzioni con il vincolo indicato:

(a) $f(x,y) = (x-2y)^2$ sulla curva $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(b) $f(x,y) = (3x+2y)^2$ sulla curva $4x^2+y^2 = 4$

Svolgimento (b) Rappresentiamo la curva di equazione $4x^2+y^2=4$.



se $y=0 \Rightarrow 4x^2=4 \Rightarrow x=\pm 1$

se $x=0 \Rightarrow y=\pm 2$

La curva rappresentata è una curva regolare. Tale curva può essere vista come l'insieme degli zeri della funzione $F(x,y) = 4x^2+y^2-4$

$$Z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=0\}.$$

Possiamo rappresentare l'ellisse anche in forma parametrica:

$$\gamma : [0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad t \longmapsto (\cos t, 2\sin t)$$

$$\gamma(t): \begin{cases} x=\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \rightarrow 4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4$$

$F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ $[\, f(x,y) = (3x+2y)^2 \,]$.

Cerchiamo i punti di estremo vincolato di f sul vincolo F.

RICORDA TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE IN $\mathbb{R}^2$

Siano $f, F \in \mathcal{C}^1(A)$ con A aperto di $\mathbb{R}^2$. Supponiamo $\nabla F(x,y) \neq \vec{0}$ $\forall (x,y)\in A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $Z \neq \emptyset$. Allora se $(x_0,y_0)\in Z$ è un punto di estremo vincolato per f a Z esiste un numero reale λ tale che:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla F \\ F(x,y) = 0 \end{cases}$$

Inoltre se definiamo: $\mathcal{L}(x,y,\lambda) := f(x,y) - \lambda F(x,y)$, $\mathcal{L}$ è tale che $\nabla\mathcal{L}(x_0,y_0,\lambda) = \vec{0}$.

Dunque

$$\nabla F(x,y) = \nabla\left(4x^2+y^2-4\right) = \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ma $(0,0) \notin Z$.

$$\nabla f(x,y) = \nabla\left((3x+2y)^2\right) = \begin{pmatrix} 6(3x+2y) \\ 4(3x+2y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla F(x,y) \\ \\ F(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cancel{6}^{\,3}(3x+2y) = \lambda \cancel{8}^{\,4} x \\ \cancel{4}^{\,2}(3x+2y) = \lambda \cancel{2}^{\,1} y \\ 4x^2+y^2-4=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x+2y = \frac{4}{3}\lambda x \\ 3x+2y = \frac{\lambda}{2} y \\ 4x^2+y^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{4}{3}\lambda x = \frac{\lambda}{2} y \\ 3x+2y = \frac{\lambda}{2} y \\ 4x^2+y^2=4 \end{cases} \leftarrow$$

I CASO $\lambda = 0$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ 3x+2y=0 \\ 4x^2+y^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=0 \\ y=-\frac{3}{2}x \\ 4x^2+\frac{9}{4}x^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=0 \\ y=-\frac{3}{2}x \\ \frac{25}{4}x^2=4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda=0 \\ y=-\frac{3}{2}x \\ x^2=\frac{16}{25} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=0 \\ y=\frac{6}{5} \\ x=-\frac{4}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda=0 \\ y=-\frac{6}{5} \\ x=\frac{4}{5} \end{cases}$$

Dal caso I deduciamo che $\exists$ due punti di estremo vincolato locale

$$P_1 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right), \quad P_2 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{6}{5}\right)$$

II CASO $\lambda \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}\lambda x = \frac{\lambda}{2} y \\ 3x+2y = \frac{\lambda}{2} y \\ 4x^2+y^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\frac{8}{3}x \\ 3x+2y=\frac{\lambda}{2}y \\ 4x^2+y^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\frac{8}{3}x \\ 3x+\frac{16}{3}x = \lambda\frac{4}{3}x \\ 4x^2+\frac{64}{9}x^2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{3}x \\ \frac{25}{\cancel{3}}x = \lambda \frac{4}{\cancel{3}} x \\ \frac{\cancel{100}^{50^{25}}}{9}x^2 = \cancel{4}_2 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{3}x \\ x(4\lambda - 25) = 0 \\ x^2 = \frac{9}{25} \end{cases} \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = \frac{8}{3}x \\ \lambda = \frac{25}{4} \\ x^2 = \frac{9}{25} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{25}{4} \\ y = -\frac{8}{5} \\ x = -\frac{3}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = \frac{25}{4} \\ y = \frac{8}{5} \\ x = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Dal II caso ottengo altri due punti di estremo vincolato locale

$$P_3 = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{8}{5}\right) \quad e \quad P_4 = \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

Osserviamo che $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. In particolare f è di classe $\mathcal{C}^1$ sull'insieme $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 4\}$. Questo insieme è chiuso e limitato.

In $\mathbb{R}^2$ $(Z \text{ chiuso e limitato}) \Leftrightarrow (Z \text{ è compatto})$

Allora posso applicare il teorema di Weierstrass per f sul dominio Z.

$\Rightarrow \exists$ max e min assoluti per f su Z.

$$f(P_1) = (3x+2y)^2 \Big|_{P_1 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right)} = \left(-\frac{12}{5} + \frac{12}{5}\right)^2 = 0$$

$$f(P_2) = (3x+2y)^2 \Big|_{P_2 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{6}{5}\right)} = 0$$

$$f(P_3) = (3x+2y)^2 \Big|_{P_3 = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{8}{5}\right)} = \left(-\frac{9}{5} - \frac{16}{5}\right)^2 = 25$$

$$f(P_4) = (3x+2y)^2 \Big|_{P_4 = \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5}\right)} = 25$$

Quindi $f(P_1) = f(P_2) = 0 < f(P_3) = f(P_4) = 25$

$\Rightarrow$ • P_1, P_2 sono i punti di minimo assoluto per f su Z e il valore di minimo, $\min_{(x,y) \in Z} f(x,y) = 0$

• P_3, P_4 sono i punti di massimo assoluto per f su Z, $\max_{(x,y) \in Z} f(x,y) = 25$.

N.B. Posso risolvere l'esercizio mediante la parametrizzazione $\gamma(t)$ indicata in precedenza

$$h(t) = f \circ \gamma = f(x(t), y(t)) = (3\cos t + 4\sin t)^2$$

$\gamma(t) = (\cos t, 2\sin t)$

Posso studiare $h'(t) = 0$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Trovare i punti critici di h $\Rightarrow$ trovate P_1, P_2, P_3, P_4.

$$h'(t) = 2(3\cos t + 4\sin t)(-3\sin t + 4\cos t) \geq 0$$

esercizio Trovare i valori di t t.c. $h'(t) = 0$ e studiare il segno di $h'(t)$.

ESERCIZIO 2 Trovare i punti della superficie di equazione

$$z^2 = xy + 1$$

più vicini all'origine degli assi.

Svolgimento. Ricordiamo che la distanza di un punto di coordinate $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dall'origine degli assi $(0,0,0)$ è:

$$d(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Per i punti che appartengono alla superficie sappiamo che $z^2 = xy + 1$, quindi la distanza diventa

$$d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + xy + 1} \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Inoltre sappiamo che $xy \geq -1$ in quanto $z^2 = xy + 1 \geq 0$.

Dobbiamo cercare i punti di minimo assoluto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con $x_0 y_0 \geq -1$ per la funzione $d(x,y)$.

Ma minimizzare $d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + xy + 1}$ è equivalente a minimizzare il radicando

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1.$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 2y + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2y+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ -4x+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$P_0 = \binom{0}{0}$ è l'unico punto critico per f in $\mathbb{R}^2$.

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \det H_f(0,0) = 3 > 0 \\ f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $P_0 = (0,0)$ è un punto di minimo relativo per f

$\Rightarrow$ $P_0 = (0,0)$ è di minimo relativo per d, $0 \cdot 0 \geq -1$.

Ma un punto di minimo relativo t.c. $d(0,0) = 0$ con $d(x,y) \geq 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $xy \geq -1$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ è un MINIMO ASSOLUTO per d.

Ma

$$z^2 = xy+1 \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1 \; \begin{matrix} \nearrow (0,0,-1) \\ \searrow (0,0,1) \end{matrix}$$

e quindi $Q_0 = (0,0,-1)$ e $Q_1 = (0,0,1)$ sono i punti cercati.

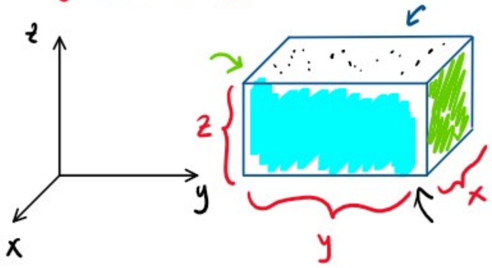
ESERCIZIO 3

(a) Da un cartone di $12\ m^2$ si deve ricavare una scatola senza coperchio, a forma di parallelepipedo rettangolo. Determinare il massimo volume possibile della scatola. (Massimizzazione a superficie fissata)

(b) Data una certa capacità di una lattina cilindrica (volume fissato) minimizzare la superficie della lattina. (Minimizzazione a volume fissato)

(c) Utilizzando il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, si chiede di decomporre il numero reale positivo a in tre termini non negativi, tali che il loro prodotto sia massimo.

Svolgimento: (a) Indichiamo con x, y, z le lunghezze (in metri) dei lati della scatola



$x, y, z > 0$ e il volume della scatola

$$V(x,y,z) := xyz$$

Poichè l'area della scatola (senza coperchio) è $12\,m^2$

$$2xz + 2yz + xy = 12 \Rightarrow 2z(x+y) = 12 - xy \Rightarrow z = \frac{12-xy}{2(x+y)}$$

* sostituiamo in V

$$\Rightarrow \quad V(x,y,z) \overset{*}{=} f(x,y) = xy \cdot \frac{12-xy}{2(x+y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{(12y-2xy^2)2(x+y) - (12xy-x^2y^2)\cdot 2}{4(x+y)^2} \\ \dfrac{(12x-2xy)2(x+y) - (12xy-x^2y^2)2}{4(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f_x(x,y) = \frac{y^2(12-x^2-2xy)}{2(x+y)^2} \qquad f_y(x,y) = \frac{x^2(12-y^2-2xy)}{2(x+y)^2}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 12-x^2-2xy=0 \\ 12-y^2-2xy=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 12-2xy = x^2 \\ 12-2xy = y^2 \end{cases} \iff x^2 = y^2$$

poiché $x,y>0$

$$\iff \boxed{x=y} \iff 12-y^2-2y^2=0 \iff -3y^2=-12 \iff y^2=4$$

$\iff$ l'unico punto stazionario $P=(2,2)$ $\iff$ $z = \left.\dfrac{12-xy}{2(x+y)}\right|_P = \dfrac{12-4}{2\cdot 4} = \dfrac{8}{8} = 1$

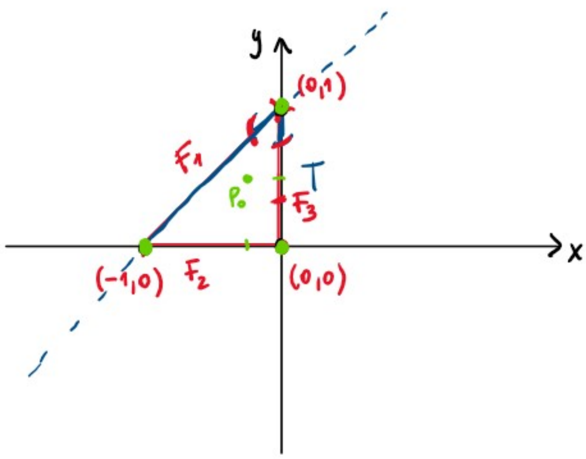
$\iff (2,2,1) \iff V(2,2,1) = 2\cdot 2\cdot 1 = 4$

ESERCIZIO 4 Motivando la risposta, stabilire se la funzione

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}$$

ammette massimi e minimi assoluti sul triangolo, compreso della sua parte interna, di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$. In caso affermativo se ne calcolino le coordinate.

Svolgimento



$\partial T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; \ldots \}$

$\mathring{T} \leftarrow$ vado a calcolare massimi e minimi liberi.

Cosa succede in $\mathring{T}$?

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y-\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y=-2x \\ x-4x-\frac{3}{4}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-2x \\ -3x=\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \qquad P_0=\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) \rightarrow Hf=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} f_{xx}(P_0)>0 \\ \det H_f(P_0)>0 \end{cases} \Rightarrow P_0 \text{ min relativo.}$$

Cosa succede sul vincolo ∂T.

$$F_1(x,y) = y-x-1=0$$
$$F_2(x,y) = y=0$$
$$F_3(x,y) = x=0$$

retta passante per $(0,1)$ e $(-1,0)$

$$y=mx+q \qquad \begin{cases} q=1 \\ -m+q=0 \end{cases}$$
$$y=x+1 \qquad m=q$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y-\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

F_1

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla F_1 \\ F_1=0 \end{cases} \qquad \nabla F_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

F_2

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla F_2 \\ F_2=0 \end{cases} \qquad \nabla F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

F_3

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla F_3 \\ F_3=0 \end{cases} \qquad \nabla F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I

$$\begin{cases} 2x+y=-\lambda \\ x+2y-\frac{3}{4}=\lambda \\ y=x+1 \end{cases}$$

II

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y-\frac{3}{4}=\lambda \\ y=0 \end{cases}$$

III

$$\begin{cases} 2x+y=\lambda \\ x+2y-\frac{3}{4}=0 \\ x=0 \end{cases}$$

II

$$\begin{cases} x=0 \\ \lambda=-\frac{3}{4} \\ y=0 \end{cases}$$

$(0,0)$ è un punto regolare per ∂T? NO, quindi non può essere estremo vincolato

III

$$\begin{cases} \lambda=\frac{3}{8} \\ 2y=\frac{3}{4} \Rightarrow y=\frac{3}{8} \\ x=0 \end{cases}$$

I

$$\begin{cases} \lambda = -2x - y \\ -2x - y = x + 2y - \frac{3}{4} \\ y = x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -2x - y \\ -3y = -3x - \frac{3}{4} \\ y = x+1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = -2x - y \\ y = x + \frac{1}{4} \\ y = x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -2x - y \\ y = x + \frac{1}{4} \\ \cancel{x} + 1 = \cancel{x} + \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

$\Rightarrow$ $P_1 = \left(0, \frac{3}{8}\right)$ è l'unico punto di estremo vincolato locale e si trova nell'insieme $Z_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F_3(x,y) = x = 0\}$

Ricapitolando, i vertici del triangolo $A = (0,0)$, $B = (-1,0)$, $C = (0,1)$ non sono punti regolari del vincolo ∂T.

All'interno di T abbiamo un punto critico $P_0 = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ di minimo relativo e $P_1 = \left(0, \frac{3}{8}\right)$ è l'unico estremo vincolato locale.

Essendo $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}$ di classe $\mathcal{C}^1$ sul vincolo T (compatto) dal Teorema di Weierstrass segue che f ammette massimi e minimi assoluti su T.

$$f(A) = f(0,0) = -\frac{1}{4} \simeq -0{,}25$$

$$f(B) = f(-1,0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$f(C) = f(0,1) = 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$f(P_0) = f\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{3}{8} - \cancel{\frac{1}{4}} = \frac{1}{16} - \frac{1}{2} = \frac{-7}{16} \simeq -0{,}438$$

$$f(P_1) = f\left(0, \frac{3}{8}\right) = \frac{9}{64} - \frac{9}{32} - \frac{1}{4} = \frac{9 - 18 - 16}{64} = -\frac{25}{64} \simeq -0{,}39$$

$\Rightarrow$ $B = (-1, 0)$ è il massimo assoluto di f su T.

$P_0 = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ è il minimo assoluto di f su T.

Esercitazione 6 - 16-11-2020 (2 ore)

lunedì 16 novembre 2020 10:24

ESERCIZI SU MASSIMI E MINIMI VINCOLATI NEL PIANO $\mathbb{R}^2$

ESERCIZIO 1 Determinare il massimo e il minimo della funzione f sul vincolo corrispondente

(a) $f(x,y) = x^2+y^2$ su $g(x,y) = e^{x^2}+e^{y^2}-4 = 0$

(b) $f(x,y) = e^{xy}$ su $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-1 \le y \le 3\}$

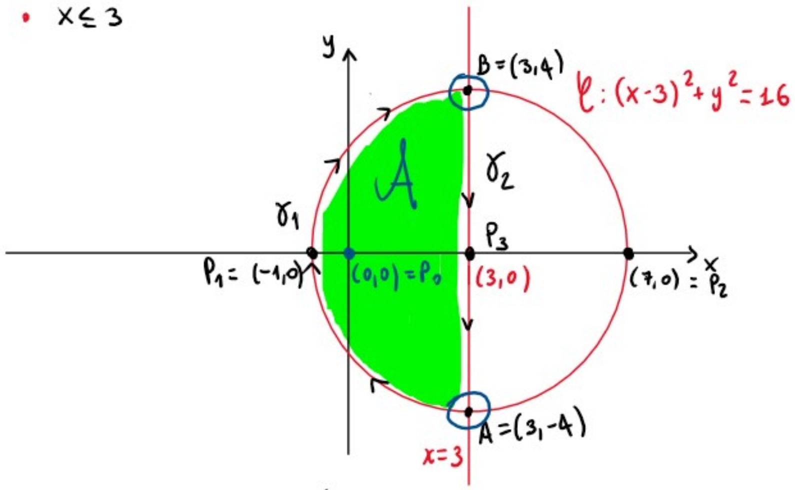
(c) $f(x,y) = \arctan(x+y)$ su $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4}+y^2 \le 4\}$

(d) $f(x,y) = x^2+y^2$ su $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-6x\le 7,\ x\le 3\}$

Soluzione: (d)
- $x^2+y^2-6x \le 7 \Rightarrow x^2-6x+9+y^2 \le 7+9$

$\Rightarrow (x-3)^2+y^2 \le 16$

- $x \le 3$



Osserviamo che l'insieme A è compatto. $f(x,y) = x^2+y^2$ è continua su A, allora per il teorema di Weierstrass si ha che f ammette massimo e minimo assoluti su A.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff P_0 = (0,0) \text{ è l'unico punto critico per } f \text{ su } \mathbb{R}^2$$

In particolare, $P_0 \in \mathring{A}$.

È facile dimostrare che P_0 è un punto di minimo relativo. [esercizio]

Adesso ricerchiamo i punti di estremo vincolato sul vincolo ∂A.

$\partial A = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Nei punti A e B il bordo non è una curva regolare, quindi vanno una riflessione a parte.

γ_1: $g_1(x,y) = x^2+y^2-6x-7 = 0$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_1 \\ g_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cancel{2}x = \lambda(\cancel{2}x-\cancel{6}^{\,3}) \\ \cancel{2}y = \lambda(\cancel{2}y) \\ x^2+y^2-6x-7 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda(x-3) \\ y(\lambda-1) = 0 \\ x^2+y^2-6x-7 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{I CASO} \quad y=0}$

$$\begin{cases} x=\lambda(x-3) \\ y=0 \\ x^2-6x-7=0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} -1=\lambda(-1-3) \ \vee \ 7=\lambda(7-3) \\ y=0 \\ x=-1 \ \vee \ x=7 \end{cases}$$

$\boxed{\text{II CASO}: \lambda=1}$

$$\begin{cases} \cancel{x}=\cancel{x}-3 \\ \lambda=1 \\ x^2+y^2-6x-7 \end{cases}$$

INCOMPATIBILE

$P_1=(-1,0)$ e $P_2=(7,0)$

$P_1 \in \partial A$, ma $P_2 \notin \partial A$, quindi P_2 non è un estremo vincolato per f su ∂A.

γ_2: $g_2(x,y)=x-3=0$

$$\begin{cases} 2x=\lambda \\ 2y=0 \\ x-3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=6 \\ y=0 \\ x=3 \end{cases} \iff P_3 \text{ estremo vincolato locale}$$

$P_0=(0,0)$ estremo libero

$P_1=(-1,0)$ e $P_3=(3,0)$ estremi vincolati locali

$A=(3,4)$ e $B=(3,-4)$ punti singolari (ossia dove il vincolo non ammette derivate parziali o dove $\nabla g=0$)

$$\left.\begin{aligned} f(P_0)&=0 \\ f(P_1)&=1 \\ f(P_3)&=9 \\ f(A)=f(B)&=9+16=25 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

P_0 è il minimo assoluto di f sull'insieme A.

A e B sono i punti di massimo assoluti di f sull'insieme A.

ESERCIZI SU MASSIMI E MINIMI VINCOLATI IN $\mathbb{R}^3$

ESERCIZIO 2 (DEMARCO-MARICONDA) Esercizi di calcolo in più variabili

Utilizzando il teorema dei moltiplicatori di Lagrange calcolare massimo e minimo assoluti di f sul vincolo corrispondente:

(a) $f(x,y,z)=xy^2z^3$ su $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1,\ x,y,z\geq 0\}$.

(b) $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ su $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1,\ x,y,z\geq 0\}$.

Soluzione : (b) Ottimizziamo f sul vincolo $g(x,y,z) = x+y+z-1 = 0$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 3yz = \lambda \\ 3y^2 - 3xz = \lambda \\ 3z^2 - 3xy = \lambda \\ x+y+z = 1 \end{cases}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall (x,y,z) \in Z = \{ g(x,y,z) = 0 \}$

$$\iff \begin{cases} \cancel{3}x^2 - \cancel{3}yz = \cancel{3}y^2 - \cancel{3}xz \\ 3y^2 - 3xz = \lambda \\ 3z^2 - 3xy = \lambda \\ x+y+z = 1 \end{cases}$$

dalla I equazione ricavo

$$x^2 - y^2 = yz - xz = (y-x)z \iff (x-y)(x+y) = -(x-y)z$$

$\boxed{\text{I CASO} \quad x = y}$

$$\begin{cases} x = y \\ 3y^2 - 3yz = \lambda \\ 3z^2 - 3y^2 = \lambda \\ y+y+z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ 3y(y-z) = \lambda \\ 3(z-y)(z+y) = \lambda \\ 2y+z = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ 3y(y-z) = 3(z-y)(z+y) \\ \lambda = 3y(y-z) \\ z = 1-2y \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ \cancel{3}y(y-1+2y) = \cancel{3}(1-2y-y)(1-2y+y) \\ z = 1-2y \\ \lambda = 3y(y-z) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ 3y^2 - y = (1-3y)(1-y) \\ z = 1-2y \\ \lambda = 3y(y-z) \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ \cancel{3y^2} - \cancel{y} = 1 - \cancel{y} - 3y + \cancel{3y^2} \\ z = 1-2y \\ \lambda = 3y(y-z) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \\ \lambda = 0 \end{cases} \qquad P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ è un estremo vincolato locale.}$$

$\boxed{\text{II CASO} \quad x \neq y}$

$$\begin{cases} (\cancel{x-y})(x+y) = -(\cancel{x-y})z \\ 3y^2 - 3xz = \lambda \\ 3z^2 - 3xy = \lambda \\ x+y+z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -z \Leftrightarrow x+y+z = 0 \\ \vdots \\ x+y+z = 1 \end{cases}$$

INCOMPATIBILE!

Adesso studiamo $\nabla f = \vec{0}$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3yz \\ 3y^2 - 3xz \\ 3z^2 - 3xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3yz = 0 \\ 3y^2 - 3xz = 0 \\ 3z^2 - 3xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = yz \\ y^2 = xz \\ z^2 = xy \end{cases}$$

$\boxed{\text{I CASO}}$ se una tra x, y, z si annulla $\Rightarrow (0,0,0)$ è l'unico punto critico

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{II CASO}}$ se $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0$ il sistema ha soluzioni?

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{y} \\ y^2 = x \cdot \frac{x^2}{y} \Leftrightarrow y^3 = x^3 \Leftrightarrow (y-x)(y^2+x^2+xy) = 0 \Leftrightarrow y = x \\ z^2 = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{z}^{\,1} = \frac{z^{\cancel{2}}}{y} \\ y = x \\ z^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow Q_t = (t, t, t) \text{ con } t > 0 \text{ sono punti critici.}$$

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0 \qquad \forall (x,y,z) \in T \ ?$$

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz \qquad \text{VERA } \forall\, x,y,z \geq 0. \ [\text{MEDIA ARITMETICA} \geq \text{MEDIA GEOMETRICA}]$$

Dai punti trovati e dal fatto che $f \geq 0 \quad \forall (x,y,z) \in T$ deduciamo che

$P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è minimo vincolato locale, che coincide con il minimo assoluto

perché $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 0 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0$

In realtà anche in (t,t,t) vi è un minimo assoluto.

Dove si trova quindi il massimo assoluto per f?

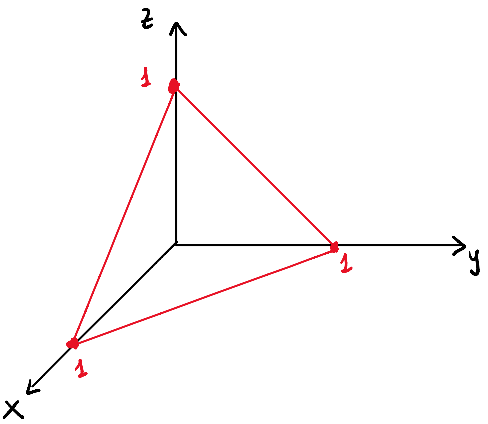
Dobbiamo studiare f sui vincoli:

$$g_1(x,y,z) = x = 0 \qquad g_2(x,y,z) = y = 0 \qquad g_3(x,y,z) = z = 0$$

i $\begin{cases} 3x^2 - 3yz = \lambda \\ 3y^2 - 3xz = 0 \\ 3z^2 - 3xy = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ ii $\begin{cases} 3x^2 - 3yz = 0 \\ 3y^2 - 3xz = \lambda \\ 3z^2 - 3xy = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ iii $\begin{cases} 3x^2 - 3yz = 0 \\ 3y^2 - 3xz = 0 \\ 3z^2 - 3xy = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$

i $\begin{cases} \lambda = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ ii $\begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ iii $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$(0,0,0) \in \partial T$, ma in tale punto non posso applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, in quanto ∂T non è regolare vicino al punto $(0,0,0)$.



Restano da verificare

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

⋮ [esercizio]

PROBLEMI CON SISTEMI DI VINCOLI

ESERCIZIO 3 Dire se

$$M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1, \ \ x^2 + y^2 = 1 \}$$

è una VARIETÀ di $\mathbb{R}^3$; trovare i punti di M, se esistono, che hanno minima, o massima distanza dall'origine $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$.

Soluzione $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ g_1(x,y,z) = 0 \ , g_2(x,y,z) = 0\}$

$$\left(M \text{ è una varietà di } \mathbb{R}^3 \right) \overset{def}{\iff} \left(\begin{array}{l} M \neq \emptyset \text{ e se prese } \vec{G} = (g_1, g_2) \\ J(\vec{G}) \text{ ha rango max } \forall (x,y,z) \in M \end{array} \right)$$

I vincoli sono
$$\begin{cases} g_1(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$J(\vec{G}) = \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 2x - y & 2y - x & -2z \\ 2x & 2y & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Cosa significa dire che $J(\vec{G})$ ha rango massimo?

Consideriamo i minori 2×2 di $J(\vec{G})$

$$\det \begin{bmatrix} 2y - x & -2z \\ 2y & 0 \end{bmatrix} = 4yz$$

$$\det \begin{bmatrix} 2x - y & -2z \\ 2x & 0 \end{bmatrix} = 4xz$$

$$\det \begin{bmatrix} 2x - y & 2y - x \\ 2x & 2y \end{bmatrix} = 2y(2x - y) - 2x(2y - x) =$$
$$= \cancel{4xy} - 2y^2 - \cancel{4xy} + 2x^2 = 2(x^2 - y^2)$$

M è una varietà se almeno uno dei tre determinanti calcolato in ogni punto $(x,y,z) \in M$ si mantiene diverso da zero.

Quindi studiamo il sistema:

$$\begin{cases} 4yz = 0 \\ 4xz = 0 \\ 2(x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ (x-y)(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=0 \\ y=x \end{cases} \vee \begin{cases} t=0 \\ y=-x \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono date date

$$\mathscr{C}_g = \{(t,t,0) : t\in\mathbb{R}\} \cup \{(t,-t,0) : t\in\mathbb{R}\} \cup \{(0,0,t) : t\in\mathbb{R}\}$$

$\mathscr{C}_g \cap M = ?$

$$M ::= \begin{cases} x^2-xy+y^2-z^2=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$P_t = (t,t,0) \notin M$

$$P_t \rightsquigarrow \begin{cases} \cancel{t^2}-\cancel{t^2}+t^2-0=1 \\ t^2+t^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2=1 \\ t^2=\frac{1}{2} \end{cases}$$ NON HA SOLUZIONE

$Q_t = (t,-t,0)$

$$Q_t \rightsquigarrow \begin{cases} t^2+t^2+t^2=1 \\ t^2+t^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2=\frac{1}{3} \\ t^2=\frac{1}{2} \end{cases}$$ NON HA SOLUZIONE

$\Rightarrow Q_t \notin M$.

$H_t = (0,0,t)$

$$H_t \rightsquigarrow \begin{cases} -t^2=1 \\ 0=1 \end{cases}$$ NON HA SOLUZIONE $\Rightarrow H_t \notin M$

$M \neq \emptyset$?

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2-z^2=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{1}+\frac{1}{2}-z^2=\cancel{1} \Rightarrow z^2=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$.

$\Rightarrow M$ è una varietà di $\mathbb{R}^3$.

Ottimizzare la funzione distanza su M è equivalente a ottimizzare : $d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ e quindi devo risolvere :

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z) \\ g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $g_1(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1$, $g_2(x,y,z) = x^2+y^2-1$

$$\begin{cases} 2x = \lambda_1(2x-y) + \lambda_2(2x) \\ 2y = \lambda_1(-x+2y) + \lambda_2(2y) \\ \cancel{2}z = \lambda_1(-\cancel{2}z) \\ x^2-xy+y^2+z^2-1 = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = \lambda_1(2x-y) + \lambda_2(2x) \\ 2y = \lambda_1(-x+2y) + \lambda_2(2y) \\ z(1+\lambda_1) = 0 \\ -xy + z^2 = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{I CASO}}$ $z=0 \wedge \lambda_1 \neq -1$

$$\begin{cases} 2x = \lambda_1(2x-y) + \lambda_2(2x) \\ 2y = \lambda_1(-x+2y) + \lambda_2(2y) \\ z=0 \\ xy=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda_1(2x-y) + \lambda_2(2x) \\ 2y = \lambda_1(-x+2y) + \lambda_2(2y) \\ z=0 \\ x=0 \\ y^2=1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x = \lambda_1(2x-y) + \lambda_2(2x) \\ 2y = \lambda_1(-x+2y) + \lambda_2(2y \\ z=0 \\ y=0 \\ x^2=1 \end{cases}$$

Dai due sistemi ottenuti si ricava che i punti $P_1=(0,1,0)$, $P_2=(0,-1,0)$, $P_3=(-1,0,0)$ e $P_4=(1,0,0)$ sono punti di estremo vincolato locali e sono tali che

$$f(P_1)=f(P_2)=f(P_3)=f(P_4)=1$$

$\boxed{\text{II CASO}}$ $\lambda_1=-1 \wedge z\neq 0$

$$\begin{cases} 2x=-(2x-y)+\lambda_2(2x) \\ 2y=-(-x+2y)+\lambda_2(2y) \\ \lambda_1=-1 \\ z^2=xy \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x=-2x+y+2\lambda_2 x \\ 2y=x-2y+2\lambda_2 y \\ \lambda_1=-1 \\ z^2=xy \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\lambda_2 x=4x-y \\ 2\lambda_2 y=4y-x \\ \lambda_1=-1 \\ z^2=xy \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \underset{\iff}{x\neq 0 \wedge y\neq 0} \begin{cases} \lambda_2=\dfrac{4x-y}{2x}=2-\dfrac{y}{2x} \\ \lambda_2=\dfrac{4y-x}{2y}=2-\dfrac{x}{2y} \\ \lambda_1=-1 \\ z^2=xy \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1=-1 \\ \lambda_2=2-\dfrac{y}{2x} \\ \cancel{2}-\dfrac{y}{\cancel{2}x}=\cancel{2}-\dfrac{x}{\cancel{2}y} \\ z^2=xy \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$x\neq 0 \wedge y\neq 0$
$\iff$
moltiplico per xy ambo i membri della III eq.

$$\begin{cases} \lambda_1=-1 \\ \lambda_2=2-\dfrac{y}{2x} \\ y^2=x^2 \\ z^2=xy \\ 2x^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 - \frac{y}{2x} \\ y^2 = x^2 = \frac{1}{2} \\ z^2 = xy \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ z^2 = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ z^2 = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Dunque i punti $Q_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $Q_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $Q_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $Q_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono estremi vincolati locali e sono tali che

$$f(Q_1) = f(Q_2) = f(Q_3) = f(Q_4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Ora $f(Q_i) > f(P_i)$ $\forall\, i = 1, 2, 3, 4$. Essendo che vale la stretta disuguaglianza

$\Rightarrow$ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sono i punti di massima distanza di M dall'origine.
P_1, P_2, P_3, P_4 sono i punti di minima distanza di M dall'origine.

Esercitazione 7 - 23-11-2020 (2 ore)

lunedì 23 novembre 2020 10:25

ESERCIZIO 1 (De Marco - Mariconda) Sia M il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-z^2=1 \\ (x-y)^2+z=2 . \end{cases}$$

(i) Provare che M è una varietà differenziale 1-dimensionale

(ii) Trovare l'equazione della retta (affine) tangente ad M nel punto $(1,0,1)$

(iii) Trovare i punti di M che sono stazionari per $f(x,y,z)=z$.
[Ottimizzare f sul vincolo M].

Soluzione: (i)

$$g_1(x,y,z) = 2x^2+2y^2-z^2-1 = 0$$
$$g_2(x,y,z) = (x-y)^2+z-2 = 0 \quad , \quad \vec{G} = (g_1, g_2)$$

$$J\vec{G} = \begin{bmatrix} 4x & 4y & -2z \\ 2(x-y) & -2(x-y) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 4x & 4y \\ 2(x-y) & -2(x-y) \end{bmatrix} = -8x(x-y) - 8y(x-y) = 8(y-x)(y+x)$$

$$\det \begin{bmatrix} 4x & -2z \\ 2(x-y) & 1 \end{bmatrix} = 4x + 4z(x-y)$$

$$\det \begin{bmatrix} 4y & -2z \\ -2(x-y) & 1 \end{bmatrix} = 4y - 4z(x-y)$$

Studiamo il sistema

$$\begin{cases} \cancel{8}(y-x)(y+x)=0 \\ \cancel{4}[x+z(x-y)]=0 \\ \cancel{4}[y-z(x-y)]=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=x \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-x \\ x+z(2x)=0 \iff x(1+2z)=0 \\ -x-z(2x)=0 \iff -x(1+2z)=0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$P_t=(0,0,t) \qquad\qquad Q_s=(s,-s,-\tfrac{1}{2})$$

Verifichiamo se P_t e $Q_s \in M$ per qualche $t, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-z^2=1 \\ (x-y)^2+z=2 \end{cases}$$

$$P_t \rightsquigarrow \begin{cases} -t^2=1 \\ t=2 \end{cases} \quad \text{INCOMPATIBILE} \Rightarrow P_t \notin M \; \forall t \in \mathbb{R}$$

$$Q_s \rightsquigarrow \begin{cases} 2s^2+2s^2-\frac{1}{4}=1 \\ (2s)^2-\frac{1}{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^2=\frac{5}{16} \\ s^2=\frac{5}{8} \end{cases}$$

INCOMPATIBILE! $\Rightarrow Q_s \notin M \quad \forall s \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ M è una varietà 1-dimensionale.

(ii) $$\left[J\vec{G}(1,0,1)\right] \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$J\vec{G}(1,0,1) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overset{2}{\cancel{4}}(x-1)+0\cdot y-\overset{1}{\cancel{2}}(z-1)=0 \\ 2(x-1)-2y+1\cdot(z-1)=0 \end{cases}$$

$$r_t: \begin{cases} 2x-z=1 \\ 2x-2y+z=3 \end{cases}$$

è l'equazione cartesiana della retta tangente ad M nel punto di coordinate $(1,0,1)$.

(iii) Applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange ad $f(x,y,z)=z$ sul sistema di vincoli $\begin{cases} g_1=0 \\ g_2=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \\ g_1=0 \\ g_2=0 \end{cases}$$

esercizio per casa.

ESERCIZIO 2 Si consideri l'ellissoide ($a, b, c > 0$ sono costanti)

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

(i) Mostrare che la funzione $f(x,y,z) = xyz$ ha massimo e minimo assoluti sull'insieme:

$$T = \{ (x,y,z) \in E \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \} \subset E$$

(ii) Servirsi di (i) per calcolare $\sup g(S)$ e $\inf g(S)$ dove

$$S = \{ (x,y,z) \in T \mid x > 0, y > 0, z > 0 \}$$

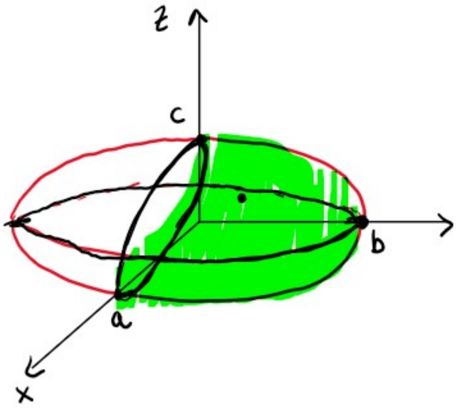
e $g(x,y,z) = \dfrac{1}{xyz}$.

(iii) Dato $(x,y,z) \in S$, scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente in (x,y,z) all'ellissoide E (usare X, Y, Z come variabili per il piano tangente), e trovare le intersezioni di tale piano con gli assi coordinati.

(iv) Trovare un punto $(x,y,z) \in S$ tale che il volume del tetraedro racchiuso tra il piano tangente per tale punto all'ellissoide E ed i piani coordinati sia minimo.

Soluzione (i) Osserviamo che T è compatto. E è compatto e $T \subset E$, quindi sicuramente T è limitato. Ma T è anche chiuso

$$T = \{ (x,y,z) \in E \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \}$$



Per il teorema di Weierstrass si ha che f ammette max e min assoluti su T.

$$f(x,y,z) = xyz$$

$$g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} yz = \lambda\left(\frac{2x}{a^2}\right) \\ xz = \lambda\left(\frac{2y}{b^2}\right) \\ xy = \lambda\left(\frac{2z}{c^2}\right) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ [x, y, z \geq 0] \end{cases}$$

I CASO Una tra x, y, z si annulla.

o $y=0$ oppure $z=0$

$$\begin{cases} x=0 \\ \lambda y = 0 \\ \lambda z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x=0 \\ \lambda = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}} \vee \quad \lambda \neq 0$$

, ma con $\lambda \neq 0$ non ho soluzione.

i punti che escono da questo sistema sono tali che o $x=0 \vee y=0 \vee z=0$

II CASO $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0 \wedge \lambda \neq 0$

$$\begin{cases} yz = \frac{2\lambda x}{a^2} \\ xz = \frac{2\lambda y}{b^2} \\ xy = \frac{2\lambda z}{c^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} xyz = \frac{2\lambda x^2}{a^2} \\ xyz = \frac{2\lambda y^2}{b^2} \\ xyz = \frac{2\lambda z^2}{c^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Sommo le prime 3 equazioni

$$\begin{cases} \dots \\ 3xyz = \frac{2\lambda x^2}{a^2} + \frac{2\lambda y^2}{b^2} + \frac{2\lambda z^2}{c^2} = 2\lambda\left(\overbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}^{\overset{1}{\shortparallel}}\right) = 2\lambda \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Pertanto $2\lambda = 3xyz$,
$$\begin{cases} xyz = \dfrac{2\lambda x^2}{a^2} \\ xyz = \dfrac{2\lambda y^2}{b^2} \\ xyz = \dfrac{2\lambda z^2}{c^2} \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

Sostituendo al posto di $xyz = \dfrac{2\lambda}{3}$ si ha che

$$\begin{cases} \cancel{\frac{2}{3}}\lambda = \dfrac{\cancel{2}\lambda}{a^2}x^2 \\ \cancel{\frac{2}{3}}\lambda = \dfrac{\cancel{2}\lambda}{b^2}y^2 \\ \cancel{\frac{2}{3}}\lambda = \dfrac{\cancel{2}\lambda}{c^2}z^2 \\ g=0 \end{cases} \overset{\lambda\neq 0}{\iff} \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x^2 = \dfrac{a^2}{3} \\ y^2 = \dfrac{b^2}{3} \\ z^2 = \dfrac{c^2}{3} \end{matrix} \quad , \text{ ma } x,y,z \geq 0 \quad \Rightarrow \quad P = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$$

Nei punti che escono fuori dal I CASO, una delle tre coordinate è nulla, pertanto $f(x,y,z) = xyz$ assume il valore minimo $(=0)$ in tali punti. Dunque f assume il MASSIMO ASSOLUTO in P.

(ii) Essendo $g(x,y,z) = \dfrac{1}{f(x,y,z)}$ si ha che

$$\inf g(S) = \frac{1}{\max f(S)} = \frac{1}{\sup f(S)} = \frac{1}{f(P)} = \frac{3\sqrt{3}}{abc}$$

Poiché il minimo di f su T è 0 $\Rightarrow$ l'inf di f su S è 0.

$\Rightarrow$ $\sup g(S) = +\infty$ (essendo g definita come reciproco di f).

(iii) $h(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

$$(h_x, h_y, h_z) \cdot (X - x_0, Y - y_0, Z - z_0) = 0$$

(iv) Vanno usati i risultati dei punti (i) e (ii) $\rightarrow$ $P = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

Esercitazione 8 - 26-11-2020 (2 ore)

giovedì 26 novembre 2020 10:31

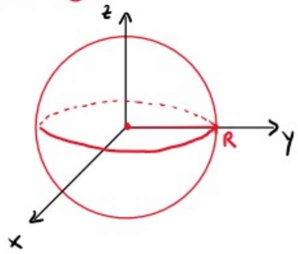
ESERCIZI SU INTEGRALI DI SUPERFICIE IN $\mathbb{R}^3$

ESERCIZIO 1 Sia S la superficie di una sfera di raggio $R>0$. Verificare che

ⓐ S è una superficie regolare

ⓑ l'area di S vale $4\pi R^2$.

SOLUZIONE: ⓐ Consideriamo una sfera S di centro l'origine e raggio R.



La parametrizzazione della sfera è data dalle "note" coordinate sferiche:

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\varphi, \vartheta) \longmapsto (x,y,z)$$

$$\psi : \begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = R\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}, \text{ con } (\varphi,\vartheta) \in [0,\pi]\times[0,2\pi]$$

Per dimostrare che S è una superficie regolare bisogna verificare che:

(i) ψ è di classe $\mathcal{C}^1$ [OK, già verificato]

(ii) ψ è una funzione iniettiva [OK, implicito nella costruzione del cambio di coordinate]

(iii) La matrice Jacobiana di ψ ha caratteristica 2 per ogni $(\varphi,\vartheta) \in (0,\pi)\times(0,2\pi)$ [equivale a far vedere che la matrice $J\psi$ ha rango massimo].

$$J\psi(\varphi,\vartheta) = \begin{bmatrix} x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \\ x_\vartheta & y_\vartheta & z_\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\cos\varphi\cos\vartheta & R\cos\varphi\sin\vartheta & -R\sin\varphi \\ -R\sin\varphi\sin\vartheta & R\sin\varphi\cos\vartheta & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo i determinanti dei minori di ordine 2:

$$\det\begin{bmatrix} R\cos\varphi\cos\vartheta & R\cos\varphi\sin\vartheta \\ -R\sin\varphi\sin\vartheta & R\sin\varphi\cos\vartheta \end{bmatrix} = R^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\vartheta + R^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\vartheta$$
$$= R^2\sin\varphi\cos\varphi\left[\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta\right] = R^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\det\begin{bmatrix} R\cos\varphi\cos\vartheta & -R\sin\varphi \\ -R\sin\varphi\sin\vartheta & 0 \end{bmatrix} = -R^2\sin^2\varphi\sin\vartheta$$

$$\det\begin{bmatrix} R\cos\varphi\sin\vartheta & -R\sin\varphi \\ R\sin\varphi\cos\vartheta & 0 \end{bmatrix} = -R^2\sin^2\varphi\cos\vartheta$$

Al fine di dimostrare che $J\psi$ ha rango massimo, calcoliamo la somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine 2:

$$\left(R^2 \sin\varphi \cos\varphi\right)^2 + \left(-R^2 \sin^2\varphi \sin\vartheta\right)^2 + \left(-R^2 \sin^2\varphi \cos\vartheta\right)^2 =$$

$$= R^4 \sin^2\varphi \cos^2\varphi + R^4 \sin^4\varphi \sin^2\vartheta + R^2 \sin^4\varphi \cos^2\vartheta =$$

$$= R^4 \sin^2\varphi \cos^2\varphi + R^4 \sin^4\varphi \, [\overbrace{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta}^{1}] =$$

$$= R^4 \sin^2\varphi \, [\overbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}^{1}] = R^4 \sin^2\varphi \neq 0 \qquad \forall \varphi \in (0,\pi)$$

$\Rightarrow$ S è una superficie regolare.

(b) $$A(S) = \int_S d\sigma = \iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \|\Psi_\varphi \wedge \Psi_\vartheta\| \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$\Psi_\varphi = (x_\varphi, y_\varphi, z_\varphi) = (R\cos\varphi\cos\vartheta, \; R\cos\varphi\sin\vartheta, \; -R\sin\varphi)$$

$$\Psi_\vartheta = (x_\vartheta, y_\vartheta, z_\vartheta) = (-R\sin\varphi\sin\vartheta, \; R\sin\varphi\cos\vartheta, \; 0)$$

$$\Psi_\varphi \wedge \Psi_\vartheta = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ R\cos\varphi\cos\vartheta & R\cos\varphi\sin\vartheta & -R\sin\varphi \\ -R\sin\varphi\sin\vartheta & R\sin\varphi\cos\vartheta & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left(R^2\sin^2\varphi\cos\vartheta, \; R^2\sin^2\varphi\sin\vartheta, \; R^2\sin\varphi\cos\varphi \right)$$

$$\|\Psi_\varphi \wedge \Psi_\vartheta\| = \sqrt{(R^2\sin^2\varphi\cos\vartheta)^2 + (R^2\sin^2\varphi\sin\vartheta)^2 + (R^2\sin\varphi\cos\varphi)^2} = \sqrt{R^4\sin^2\varphi}$$

$$= R^2|\sin\varphi| = R^2\sin\varphi \qquad (\varphi\in[0,\pi])$$

$$\Rightarrow A(S) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin\varphi \, d\vartheta \, d\varphi = R^2 \left(\int_0^\pi \sin\varphi \, d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right)$$

$$= R^2 \, (-\cos\varphi)_0^\pi \cdot (\vartheta)_0^{2\pi} = R^2 (1+1)\cdot(2\pi - 0) = 4\pi R^2$$

ESERCIZIO 2 Calcolare l'area del paraboloide di equazione cartesiana

$$z = \frac{x^2+y^2}{2}$$

con $(x,y) \in T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 8\}$

Soluzione Essendo la superficie data da un'equazione cartesiana, una possibile parametrizzazione è data da:

$$\psi : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \frac{x^2+y^2}{2} = f(x,y) \end{cases}$$

$$\psi(x,y) = \left(x, y, f(x,y) \right)$$

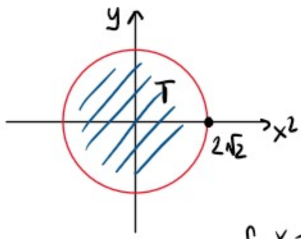
$$\psi_x \wedge \psi_y = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{bmatrix} = (-f_x, -f_y, 1)$$

$$\| \psi_x \wedge \psi_y \| = \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}$$

$$A(S) = \int_S d\sigma = \iint_T \sqrt{1+\|\nabla f\|^2}\, dx\,dy$$

Se $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$, allora $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A(S) = \iint_T \sqrt{1+x^2+y^2} = \iint_{B_{2\sqrt{2}}(0)} \sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\,dy$$



$$\overset{*}{=} \int_0^{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\rho^2} \cdot \rho \quad d\rho\, d\vartheta$$

* passo in polari: $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$

$\rho \in [0, 2\sqrt{2}]$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \left(\int_0^{2\sqrt{2}} \rho\, (1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\, d\rho \right)$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^{2\sqrt{2}} = 2\pi \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{26}{3} = \frac{52}{3}\pi$$

ESERCIZIO 3 Calcolare i seguenti integrali di superficie:

(i) $\int_S (x^2 - y^2 + y + 3z^2)\, d\sigma$ dove S è la superficie della sfera di centro l'origine e raggio R.

(ii) $\int_S (x^2+y^2)\, d\sigma$ dove S è la porzione di grafico della funzione $g(x,y) = xy$ interna al cilindro di equazione $x^2+y^2 = 8$

(iii) $\int_S y^2 \log z \, d\sigma$ dove $S \subset \mathbb{R}^3$ è la superficie cilindrica di equazione $x^2+y^2=1$, compresa tra i piani $z=1$ e $z=2$

(iv) $\int_S \frac{z+y^2}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} d\sigma$ dove S è la parte di superficie di equazione $z=x^2-y^2$ che si proietta sul dominio

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \geq 1 \text{ e } x^2+4y^2 \leq 4\}$$

Soluzione (iv) Parametrizziamo la superficie S come segue

$$h : T \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \qquad (u,v) \longmapsto (u, v, u^2-v^2)$$

$$h(u,v) = (u,v,u^2-v^2) = (u,v,f(u,v))$$

$$h_u = (1,0,2u) \qquad h_v = (0,1,-2v) \implies \|h_u \wedge h_v\| = \sqrt{1+\|\nabla f\|^2} = \sqrt{1+4u^2+4v^2}$$

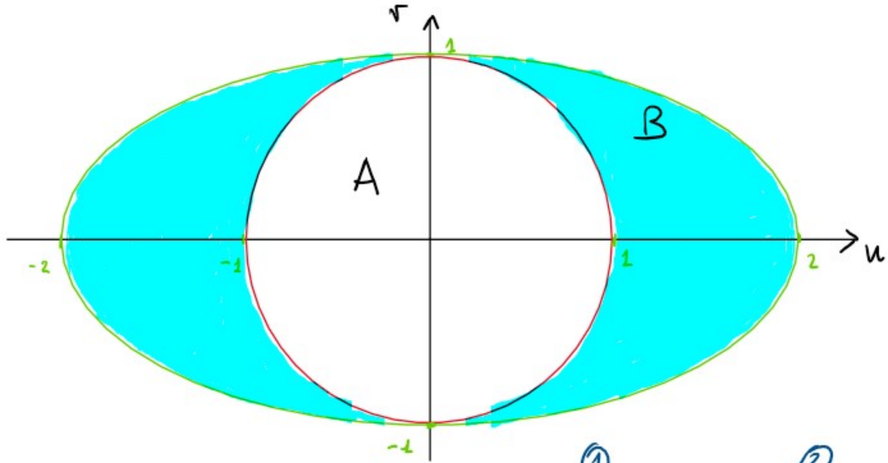
dall'esercizio precedente

$$\nabla f(u,v) = \nabla(u^2-v^2) = \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \end{pmatrix}$$

$$\int_S \frac{z+y^2}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} d\sigma = \iint_T \frac{u^2 \cancel{-v^2} \cancel{+v^2}}{\cancel{\sqrt{1+4(u^2+v^2)}}} \cdot \cancel{\sqrt{1+4(u^2+v^2)}} \, du\, dv$$

$$= \iint_T u^2 \, du\, dv$$

Rappresentiamo graficamente l'insieme $T = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 \geq 1 \text{ e } u^2+4v^2 \leq 4\}$



$$T = B \setminus A \quad \rightsquigarrow \quad \iint_T u^2 du\,dv = \underbrace{\iint_B u^2 du\,dv}_{①} - \underbrace{\iint_A u^2 du\,dv}_{②}$$

① $\iint u^2 \, du\, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 4\rho^2 \cos^2\theta \cdot (2\rho)\, d\rho\, d\theta \overset{*}{=}$

① $\iint_B u^2\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^1 4\rho^2\cos^2\vartheta\,(2\rho)\,d\rho\,d\vartheta \overset{*}{=}$

$B=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+4v^2\le 4\}$

passo in polari : $\psi:\begin{cases} u = 2\rho\cos\vartheta \\ v=\rho\sin\vartheta\end{cases} \rightsquigarrow \cancel{4}\rho^2\cos^2\vartheta + \cancel{4}\rho^2\sin^2\vartheta \le \cancel{4}$

es

$\rho^2\le 1 \rightsquigarrow \rho\in[0,1]$

$\det J\psi = 2\rho$

$\vartheta\in[0,2\pi)$

$\overset{*}{=} 2\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\,d\vartheta\right)\left(\int_0^1 4\rho^3\,d\rho\right) = 2\left[\frac{\vartheta+\sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right]_0^{2\pi}\cdot\left[\rho^4\right]_0^1 = 2\pi$

② $\iint_A u^2\,du\,dv \overset{\text{passo in polari}}{=} \int_0^1\int_0^{2\pi}\rho^2\cos^2\vartheta\cdot\rho\,d\vartheta\,d\rho = \left(\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\,d\vartheta\right)\left(\int_0^1\rho^3 d\rho\right)$

$A=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2\le 1\}$

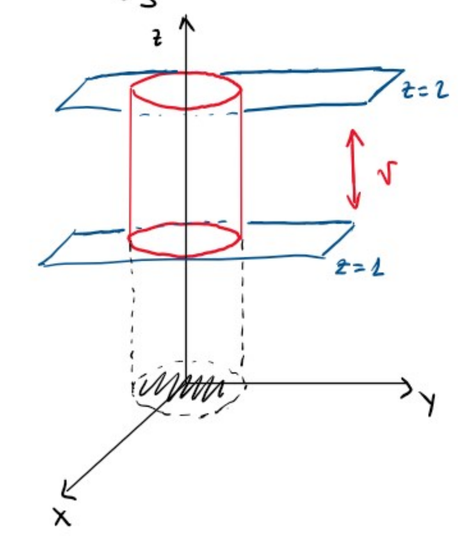
$= \left[\frac{\vartheta+\sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right]_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

$\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta\end{cases}$

Quindi ricomponendo il tutto abbiamo dimostrato che :

$$\int_S \frac{z+y^2}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}\,d\sigma = \iint_T u^2\,du\,dv = \iint_B u^2\,du\,dv - \iint_A u^2\,du\,dv = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

(iii) $\int_S y^2\log z\,d\sigma$



S è la superficie cilindrica di equazione $x^2+y^2=1$ compresa tra i piani $z=1$ e $z=2$

Per il cilindro conosciamo la parametrizzazione fornita dalle coordinate cilindriche :

$h:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v)\longmapsto h(u,v)$

$h:\begin{cases} x=\cos u \\ y=\sin u \\ z=v\end{cases}, \quad (u,v)\in[0,2\pi]\times[1,2]$

$h_u = (-\sin u, \cos u, 0)$

$h_v = (0,0,1)$

$\Rightarrow h_u\wedge h_v = \det\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$$= (\cos u, \sin u, 0)$$

$$\| h_u \wedge h_v \| = \sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u + 0^2} = 1$$

$$\int_S y^2 \log z \, d\sigma = \iint_{[0,2\pi]\times[1,2]} \sin^2 u \cdot \log v \cdot 1 \, du\, dv = \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 u \, du\right)\left(\int_1^2 \log v \, dv\right)$$

$$= \left[\frac{\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right]_0^{2\pi} \left[v \log v - v\right]_1^2 = \pi\left(2\log 2 - 2 - (-1)\right) = \pi(2\log 2 - 1)$$

$$= \pi(\log 4 - 1)$$

Esercitazione 9 - 04-12-2020 (2 ore)

venerdì 4 dicembre 2020 11:34

ESERCIZI SUI TEOREMI DI STOKES, DIVERGENZA e GAUSS-GREEN

ESERCIZIO 1 Verificare che è possibile calcolare l'area di un dominio regolare limitato $A \subset \mathbb{R}^2$ mediante una delle seguenti formule

$$(1) \quad m(A) = \int_{\partial A^+} x\, dy$$

$$(2) \quad m(A) = -\int_{\partial A^+} y\, dx$$

$$(3) \quad m(A) = \frac{1}{\alpha+\beta} \int_{\partial A^+} \alpha x\, dy - \beta y\, dx \qquad \forall \alpha, \beta : \alpha+\beta \neq 0$$

$$(4) \quad m(A) = \frac{1}{2} \int_{\partial A^+} x\, dy - y\, dx$$

Soluzione: (1) Data $f: A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con A dominio regolare, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\Omega \supset A$, Ω aperto

$$(a) \quad \iint_A \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{\partial A^+} f(x,y)\, dy \qquad \text{FORMULA DI GAUSS-GREEN}$$

$$m(A) = \iint_A 1 \cdot dx\, dy \underset{G-G}{=} \int_{\partial A^+} x\, dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \Rightarrow f(x,y) = x$$

(2) Per risolvere il 2° bisogna ricordarsi la seconda formula di Gauss-Green

$$\iint_A \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\partial A^+} f(x,y)\, dx$$

ESERCIZIO 2 Se A è un dominio regolare, la cui frontiera si rappresenta in coordinate polari tramite la relazione $\rho = \rho(\vartheta)$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$, allora per calcolare l'area di A vale la seguente formula:

$$m(A) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(\vartheta)\, d\vartheta$$

Soluzione: $\partial A^+ : \begin{cases} x = \rho(\vartheta) \cos \vartheta \\ y = \rho(\vartheta) \sin \vartheta \end{cases}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$

Dall'esercizio precedente parte (3) con $\alpha=\beta=1$ si ha

$$m(A)=\frac{1}{2}\int_{\partial A^+} x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\rho(\vartheta)\cos\vartheta)\cdot\overbrace{(\rho'(\vartheta)\cdot\sin\vartheta+\rho(\vartheta)\cos\vartheta)}^{dy}$$

$$-\rho(\vartheta)\sin\vartheta\,(\rho'(\vartheta)\cos\vartheta-\rho(\vartheta)\sin\vartheta)\,d\vartheta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cancel{\rho(\vartheta)\cdot\rho'(\vartheta)\sin\vartheta}\cos\vartheta+\underline{\rho^2(\vartheta)\cos^2\vartheta}-\cancel{\rho(\vartheta)\rho'(\vartheta)}\sin\vartheta\cos\vartheta+\underline{\rho^2(\vartheta)\sin^2\vartheta}\right)d\vartheta$$

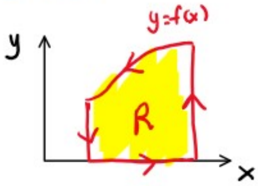
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2(\vartheta)\,d\vartheta$$

ESERCIZIO 3 Applicando le formule degli esercizi precedenti, calcolare

(1) L'area di un cerchio C di raggio r.

(2) L'area di un ellisse E di semiassi a e b.

(3) L'area di un rettangoloide R



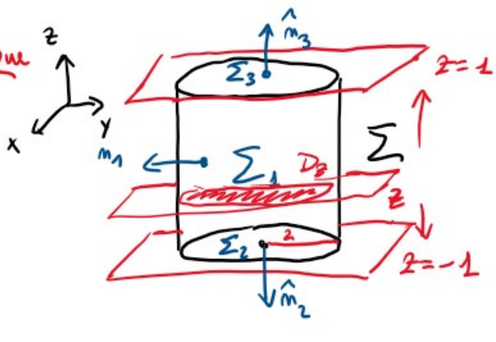
(4) L'area racchiusa dalla curva $\gamma(t)=(t^2+t,\ t^4+t)$, $t\in[0,1]$

ESERCIZIO 4 Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x,y,z)=(x,y,z^4)$$

attraverso la superficie Σ del cilindro di equazione $x^2+y^2=4$ delimitato dai piani $z=-1$ e $z=1$.

<u>Soluzione</u>



Per risolvere l'esercizio dobbiamo provare ad applicare il teorema della divergenza.

Osserviamo innanzitutto che

$$\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3$$

dove $\Sigma_2\subset\{z=-1\}$ e $\Sigma_3\subset\{z=1\}$ (sono i "coperchi" del cilindro)

Σ_1 è la superficie laterale.

Per calcolare il flusso di $\vec{F}$ attraverso Σ : (essendo $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, dovremmo distinguere i tre contributi)

$$\Phi_\Sigma(\vec{F}) = \int_\Sigma \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS \underset{\text{TEO DELLA DIVERGENZA}}{=} \iiint_V div(\vec{F})\, dx\, dy\, dz$$

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2 \leq 4 \text{ e } -1 \leq z \leq 1\}$$

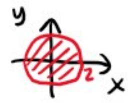
$$F(x,y,z) = (x, y, z^4) \Rightarrow div(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = 1 + 1 + 4z^3 = 2 + 4z^3$$

$$\Phi_\Sigma(\vec{F}) = \iiint_V 2+4z^3\, dx\, dy\, dz$$

V è un dominio z-semplice, quindi si può integrare per strati

$$\iiint_V 2+4z^3\, dx\, dy\, dz = \int_{-1}^{1} \left(\iint_{D_z} 2+4z^3\, dx\, dy \right) dz \overset{*}{=}$$

dove $D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$ (Cerchio di centro l'origine e raggio 2)

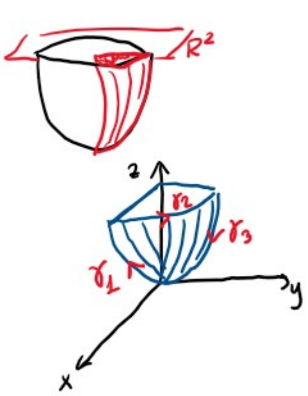


$$\overset{*}{=} \int_{-1}^{1} \left((2+4z^3) \iint_{D_z} dx\, dy \right) dz = \int_{-1}^{1} (2+4z^3) \cdot \pi \cdot 4\, dz$$

$$= 8\pi \int_{-1}^{1} (1 + 2z^3)\, dz = 8\pi \left(z + \frac{z^4}{2} \right)_{-1}^{1} = 8\pi \left(1 + \cancel{\frac{1}{2}} - \left(-1 + \cancel{\frac{1}{2}}\right) \right) = 16\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_\Sigma(\vec{F}) = 16\pi}$$

ESERCIZIO 5 Si consideri la superficie Σ descritta da



$$z = x^2+y^2 \quad \text{per} \quad x^2+y^2 \leq R^2 \text{ e } x \geq 0,\ y \geq 0$$

e il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = (1, 0, y).$$

Calcolare

(1) Il flusso di $\nabla \times \vec{F}$ attraverso Σ orientata verso l'alto

(2) Calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo $\partial\Sigma^+$

Soluzione (1) $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 1 & 0 & y \end{bmatrix} = (1, 0, 0)$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = (1,0,0) = \vec{e}_1$$

La superficie Σ si può parametrizzare come segue

$$h: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longmapsto (u, v, u^2+v^2)$$

dove $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 \leq R^2 \text{ e } u,v \geq 0\}$

$$\Phi_\Sigma(\operatorname{rot}(\vec{F})) = \int_\Sigma \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS$$

$$\hat{n} = \frac{h_u \times h_v}{\|h_u \times h_v\|} \qquad h_u = (1,0,2u) \qquad h_v = (0,1,2v)$$

$$h_u \times h_v = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{bmatrix} = (-2u, -2v, 1)$$

$$\|h_u \times h_v\| = \sqrt{1+4u^2+4v^2}$$

$$\Phi_\Sigma(\operatorname{rot}(\vec{F})) = \int_\Sigma \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS = \iint_D \langle (1,0,0), (-2u,-2v,1) \rangle \, du\, dv$$

$$= \iint_D -2u \, du\, dv = \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\rho\cos\vartheta \cdot \rho \, d\vartheta\, d\rho =$$

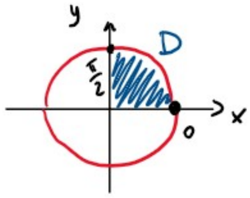
$$\overset{\text{FORMULA DI RIDUZIONE}}{=} \left(\int_0^R -2\rho^2 \, d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \, d\vartheta\right) = \left[-\tfrac{2}{3}\rho^3\right]_0^R \left[\sin\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{2}{3}R^3 \cdot (1-0) = -\frac{2}{3}R^3$$

$$\begin{cases} u = \rho \cos\vartheta \\ v = \rho \sin\vartheta \end{cases} \qquad D = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \le R^2 \,,\, u,v \ge 0 \}$$

$0 \le \rho \le R$

$0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$



$$\Longrightarrow \quad \Phi_\Sigma(\mathrm{rot}(\vec{F})) = -\frac{2}{3}R^3 .$$

(2) TEOREMA DI STOKES

Σ superficie liscia con bordo $\subset A$ aperto di $\mathbb{R}^3$, $\vec{F} \in \mathcal{C}^1(A)$, allora

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS = \oint_{\partial\Sigma^+} \vec{F} \cdot \hat{T} \, dl$$

$\gamma_1(t) = (0, t, t^2)$, $t \in [-R, 0]$, $\gamma_2(t) = (R\cos t, R\sin t, R^2)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\gamma_3(t) = (t, 0, t^2)$, $t \in [0, R]$

danno contributo nullo

$$\oint_{\partial\Sigma^+} \vec{F} \cdot \hat{T} \, dl = \oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2} + \oint_{\gamma_3}$$

$-\frac{2}{3}R^3$

|| STOKES || ESERCIZIO

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS = \Phi_\Sigma(\mathrm{rot}(\vec{F})) = -\frac{2}{3}R^3$$

$$\hat{T}_1(t) = \frac{\gamma_1'(t)}{\|\gamma_1'(t)\|}$$

ESERCIZIO 6 Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale

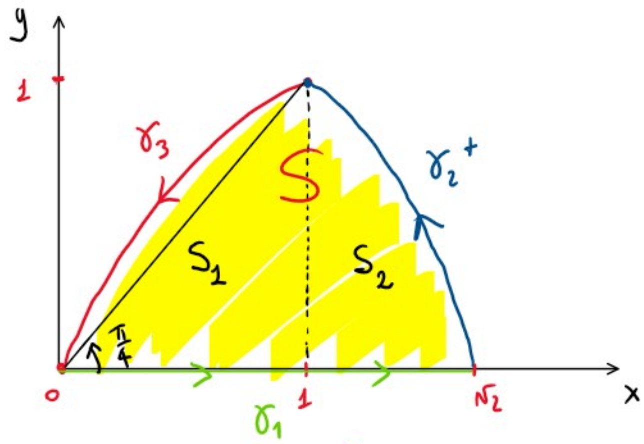
$$\vec{F}(x,y,z) = (xy, xy, 0)$$

attraverso la regione piana $S = S_1 \cup S_2$

$$S_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \,,\, 0 \le y \le \sin(\tfrac{\pi}{2}x) \}$$

$$S_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le \sqrt{2} \,,\, 0 \le y \le \sqrt{2 - x^2} \}$$

Soluzione



$$\partial S^+ = \gamma_1^+ \cup \gamma_2^+ \cup \gamma_3^+$$

$$\gamma_1 : [0,\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto (t,0,0)$$

$$\gamma_3 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto \left(t, \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right), 0\right)$$

$$\gamma_2 : \left[0,\tfrac{\pi}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, 0)$$

$$\Phi_S(\mathrm{rot}(\vec{F})) = \int_S \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n}\, dS \overset{\text{STOKES}}{=} \oint_{\partial S^+} \vec{F} \cdot \hat{T}\, dl$$

$$= \int_{\gamma_1^+} \vec{F} \cdot \hat{T}_1\, dl + \int_{\gamma_2^+} \vec{F} \cdot \hat{T}_2\, dl - \int_{\gamma_3^+} \vec{F} \cdot \hat{T}_3\, dl \overset{*}{=}$$

$$\hat{T}_1(t) = \frac{\gamma_1'(t)}{\|\gamma_1'(t)\|} = (1,0,0)$$

$$\hat{T}_2(t) = \frac{\gamma_2'(t)}{\|\gamma_2'(t)\|} = (-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, 0)\frac{1}{\sqrt{2}} = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\vec{F} = (xy, xy, 0)$$

$$\hat{T}_3(t) = \frac{\gamma_3'(t)}{\|\gamma_3'(t)\|} = \left(1, \tfrac{\pi}{2}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right), 0\right)\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}}$$

$$\overset{*}{=} \int_0^{\sqrt{2}} \cancel{(0,0,0)\cdot(1,0,0)} \cdot dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos t\sin t, 2\cos t \sin t, 0)\cdot(-\sin t, \cos t)\sqrt{2}\, dt$$

$$- \int_0^1 \left(t\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)t, t\sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right), 0\right)\cdot\left(1, \tfrac{\pi}{2}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)t, 0\right) \frac{\cancel{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}}}{\cancel{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}}}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -2 \overset{f'}{\cos t} \overset{f^2}{\sin^2 t} + 2\cos^2 t \sin t \, dt \quad - \int_0^1 t \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + \tfrac{\pi}{2} t \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) dt$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\frac{2}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^1 t \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + \frac{\pi}{2}\int_0^1 t \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) dt$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \frac{2}{3} - \quad = \ldots\ldots = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{\pi^2} - \frac{11}{12}$$

mancano calcoli

$$\int t \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) dt \overset{\text{parti}}{=} \ldots$$

$$\int \ldots$$

Esercitazione 10 - 09-12-2020 (3 ore)

mercoledì 9 dicembre 2020 09:31

SIMULAZIONE ESAME SCRITTO ANALISI 3

ESERCIZIO 1 Dire se

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2-4 = 0 \,,\; y+x=0\}$$

è una varietà di $\mathbb{R}^3$; determinare il punto $P \in M$ che abbia minima distanza dal punto $P_0 = (0,2,0)$

Soluzione:

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-4 \,,\; y+x)$$

$$J\vec{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Calcoliamo il rango di $J\vec{F}$:

$$\det\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2x-2y = 2(x-y)$$

$$\rightarrow \det\begin{bmatrix} 2x & 2z \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -2z$$

$$\rightarrow \det\begin{bmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -2z$$

Nel I caso il determinante è pari a 0 se e solo se $y=x$. Ma $y=x$, sostituito nel vincolo F_2, $F_2(x,y) = y+x=0 \leadsto F_2(x,x) = 2x = 0 \leadsto x=0=y$

$z=2$ oppure $z=-2 \Rightarrow J\vec{F}$ ha rango 2.

Nel II caso se $z=0 \leadsto$ se il primo minore ha anch'esso determinante nullo si può avere un problema:

$$z=0 \Rightarrow y=x \Rightarrow x=0=y$$

Ma $(0,0,0) \notin M$.

$\Rightarrow J\vec{F}$ ha sempre rango massimo.

$M \neq \emptyset$? $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ y=-x \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2+z^2=4 \\ y=-x \end{cases}$ $\begin{cases} z^2=4-2x^2 \\ y=-x \end{cases}$ $\rightsquigarrow z=\pm\sqrt{4-2x^2}$

Preso $x=t \Rightarrow \left(t,-t,\pm\sqrt{4-2t^2}\right)$, se t è tale che $4-2t^2\geq 0$ allora $M\neq 0$, in quanto $P_t=(t,-t,\sqrt{4-2t^2})\in M$.

$\Rightarrow$ M è una varietà di $\mathbb{R}^3$.

Adesso dobbiamo ricercare il punto $P=(x,y,z)\in M$ che abbia minima distanza da $P_0=(0,2,0)$.

Dunque dobbiamo minimizzare

$$d(P,P_0)=\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2+(z-0)^2}$$

Ma minimizzare una radice di indice pari è equivalente a minimizzare il radicando:

$$f(x,y,z)=x^2+(y-2)^2+z^2$$

sul sistema di vincoli : $\vec{F}(x,y,z)=0$ ovvero $\begin{cases} F_1=0 \\ F_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-4=0 \\ y+x=0 \end{cases}$

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

$$\begin{cases} \nabla f = \alpha\nabla F_1+\beta\nabla F_2 \\ F_1=0 \\ F_2=0 \end{cases}$$

$$\nabla f=\begin{pmatrix} 2x \\ 2(y-2) \\ 2z \end{pmatrix} \quad \nabla F_1=\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \nabla F_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2x=\alpha\, 2x+\beta \\ 2(y-2)=\alpha\cdot 2y+\beta \\ \cancel{2}z=\alpha\cdot\cancel{2}z \quad \Leftrightarrow \quad z(1-\alpha)=0 \\ x^2+y^2+z^2=4 \\ y+x=0 \end{cases}$$

I CASO $\alpha = 1$

$$\begin{cases} \cancel{2x} = \cancel{2x} + \beta \\ 2(\cancel{y}-2) = \cancel{2y} + \beta \\ \alpha = 1 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \beta = -4 \\ \vdots \end{cases}$$

INCOMPATIBILE

II CASO $z = 0$

$$\begin{cases} 2x = 2\alpha x + \beta \\ 2(y-2) = 2\alpha y + \beta \\ z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \\ z = 0 \\ x^2+x^2 = 4 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \\ z=0 \\ x^2 = 2 \\ y = -x \end{cases} \quad x = -\sqrt{2}, \; x = +\sqrt{2}$$

$P_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ e $P_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$

$$f(P_1) = 2 + (\sqrt{2}-2)^2 + 0 = 2 + 2 + 4 - 4\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}$$

$$\wedge$$

$$f(P_2) = 2 + (-\sqrt{2}-2)^2 + 0 = 2 + 2 + 4 + 4\sqrt{2} = 8 + 4\sqrt{2}$$

$f(P_2) > f(P_1) \Rightarrow P_1$ è il minimo per f

$\Rightarrow P_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \in M$ è il punto di minima distanza da $P_0 = (0,2,0)$.

ESERCIZIO 2 Si consideri il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = (z^3, y^3, x^3)$$

Calcolare il flusso uscente di $\vec{F}$ attraverso $\partial B_4(0)$.

Soluzione $\Phi_{\partial B_4(0)}(\vec{F}) = \int_{\partial B_4(0)} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS \underset{\uparrow}{=} \iiint_{B_4(0)} \operatorname{div}(\vec{F}) \, dx\,dy\,dz$

*

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Per calcolare * bisogna parametrizzare $\partial B_4(0)$: $h(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\int_{\partial B_4(0)} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iint_D \langle \vec{F}(h(u,v)), (h_u \times h_v) \rangle \, du\,dv$$

$\partial B_4(0): \quad x^2+y^2+z^2=4$

Calcoliamo innanzitutto $\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(x^3) = 3y^2$

$$\iiint_{B_4(0)} 3y^2 \, dx\, dy\, dz$$

Passiamo alle coordinate sferiche: $\Psi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(\rho,\varphi,\vartheta) \longmapsto (x,y,z)$

$$\Psi: \begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad \rho\in[0,R],\ \varphi\in[0,\pi],\ \vartheta\in[0,2\pi) \qquad |\det J\Psi| = \rho^2 \sin\varphi$$

$$\iiint_{B_4(0)} 3y^2\, dx\,dy\,dz = \iiint_{[0,4]\times[0,\pi]\times[0,2\pi)} 3\rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta \cdot \rho^2 \sin\varphi \; d\rho\, d\varphi\, d\vartheta$$

$$= \left(\int_0^4 3\rho^4\, d\rho\right)\left(\int_0^\pi \sin^3\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta\right) \overset{*}{=}$$

$$\int 3\rho^4\, d\rho = \frac{3}{5}\rho^5 + C$$

$$\int \sin^3\varphi\, d\varphi = \int \sin\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi = \int \sin\varphi\,(1-\cos^2\varphi)\, d\varphi = \int \sin\varphi\, d\varphi - \int \sin\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$= -\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3} + C$$

$$\int \sin^2\vartheta\, d\vartheta \overset{\text{per parti}}{=} \frac{\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta}{2} + C$$

$$\overset{*}{=} \left[\frac{3}{5}\rho^5\right]_0^4 \left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^\pi \left[\frac{\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{10}\pi^2\cdot 4^5$$

ESERCIZIO 3 Dimostrare che, per ogni $u,v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, vale

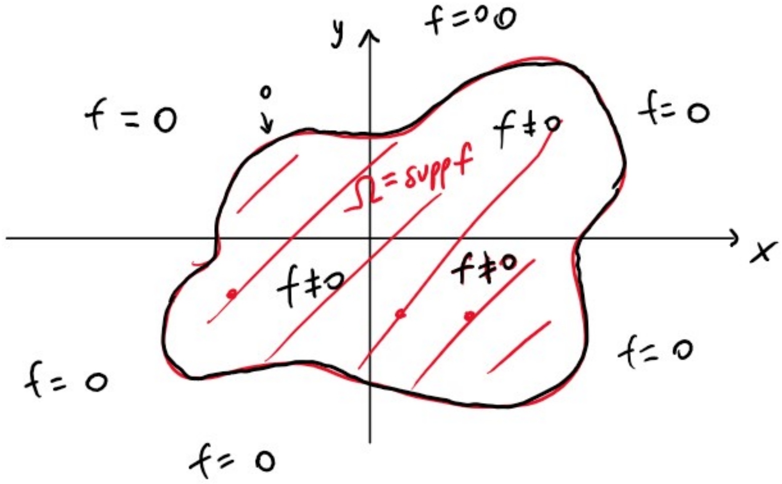
$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \Delta u \cdot v \; dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathbb{R}^3} u\cdot \Delta v \; dx\,dy\,dz$$

Soluzione: Che significa $u, v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$?

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3) := \{ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) \text{ e supp } f \text{ è compatto e di tutte le sue derivate} \}$$

$$\text{supp} f = \overline{\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) \neq 0 \}}$$ SUPPORTO O SOSTEGNO DI UNA FUNZIONE

In $\mathbb{R}^2$: $\text{supp} f = \overline{\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \neq 0 \}}$ compatto



Se $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \iiint_{\mathbb{R}^3} f \, dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega f \, dx\,dy\,dz$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI IN $\mathbb{R}^3$

Date $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$:

$$\iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v \, dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} (u \cdot v) \, \nu_x \, dS - \iiint_\Omega u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \, dx\,dy\,dz \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

$$\int_a^b u' v \, dx = [uv]_a^b - \int_a^b u \cdot v' \, dx \quad \text{in } \mathbb{R}$$

OSSERVAZIONE Se $u, v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ (Ω = intersezione supporto di $\frac{\partial u}{\partial x}$ e v)

$$\iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v \, dx\,dy\,dz = \underbrace{\int_{\partial\Omega} (u \cdot v) \cdot \nu_x \, dS}_{=0} - \iiint_\Omega u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \, dx\,dy\,dz$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

int. per parti

$$\iiint_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot v \, dx\,dy\,dz = \underbrace{\cancel{\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot v\right) \cdot \nu_x \, dS}}_{=0} - \iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \, dx\,dy\,dz$$

int per..

int per parti

$$\overset{\text{int per parti}}{=} - \left(- \iiint_\Omega u \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz \right) = \iiint_\Omega u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$\Rightarrow \iiint_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz$$

Analog.

$$\iiint_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} v\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$\iiint_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} v\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega u \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\,dx\,dy\,dz$$

Sommando le tre equazioni

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \Delta u \cdot v\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathbb{R}^3} u\,\Delta v\,dx\,dy\,dz \qquad \forall\, u, v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$$

ESERCIZIO 4 Si consideri in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy$$

(a) Dire se ω è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(b) $\int_{\gamma^+} \omega\, dl$, dove γ è la circonferenza centrata in $(0,2)$ di raggio 4.

Soluzione: (a)

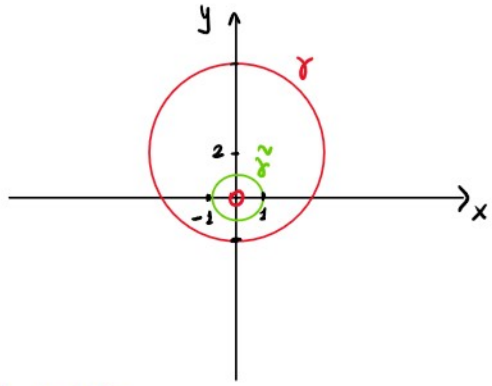
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{-2x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow \omega$ è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) $\int_{\gamma^+} \omega$

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2 + 4\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$$



$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)$

Che relazione c'è tra γ e $\tilde{\gamma}$?

γ e $\tilde{\gamma}$ sono OMOTOPE.

Quindi

$$\int_{\gamma^+} \omega = \int_{\tilde{\gamma}^+} \omega$$

$$\int_{\gamma^+} \omega = \int_{\tilde{\gamma}^+} \omega = \int_0^{2\pi} \left[\frac{2\cos t}{1} (-\sin t) + \frac{2\sin t}{1} (\cos t) \right] dt$$

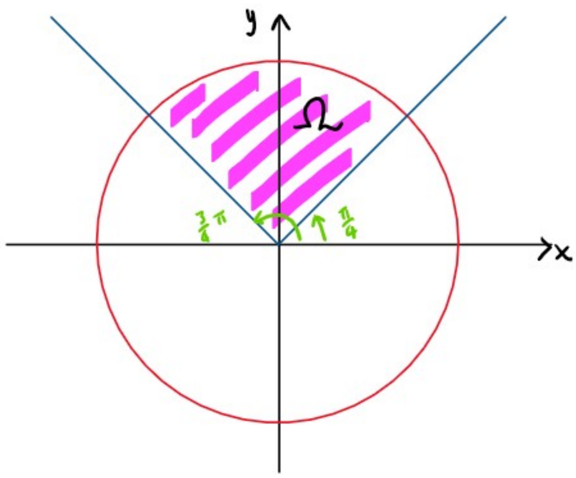
$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(-2\sin t \cos t + 2 \sin t \cos t \right)}_{= 0} dt = 0$$

ESERCIZIO 5 Calcolare

$$\iint_\Omega x^2 e^{x^2+y^2} \, dx dy$$

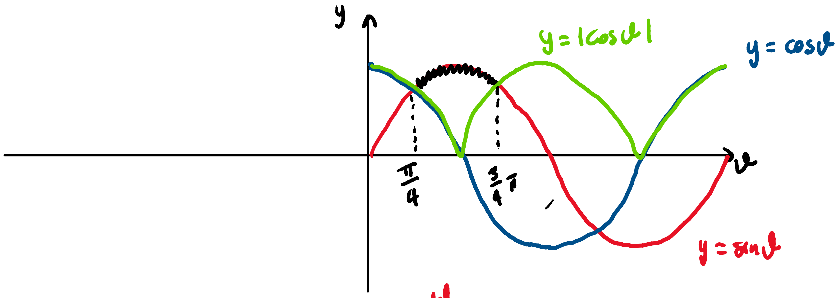
dove $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4 \, , \, y \ge |x| \}$

Soluzione



$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\vartheta \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \rho^2 \le 4 \\ \rho \sin\vartheta \ge |\rho \cos\vartheta| \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \le \rho \le 2 \\ \sin\vartheta \ge |\cos\vartheta| \end{cases} \Longrightarrow \vartheta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \right]$$



$\sin\vartheta \geq |\cos\vartheta|$

TEO del CAMBIO DI COORDINATE

$$\iint_{\Omega} x^2 e^{x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint_{[0,2]\times[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi]} \rho^2\cos^2\vartheta\, e^{\rho^2}\cdot \rho\, d\rho\, d\vartheta$$

$$= \left(\int_0^2 \rho^3 e^{\rho^2} d\rho\right)\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \cos^2\vartheta\, d\vartheta\right) =$$

$$\int \underbrace{\rho^2}_{f}\cdot\underbrace{\rho\, e^{\rho^2}}_{g'} d\rho = \rho^2\cdot\frac{e^{\rho^2}}{2} - \int \cancel{2}\rho\cdot\frac{e^{\rho^2}}{\cancel{2}}\, d\rho$$

$\int f g' = f g - \int f' g$

$$= \frac{\rho^2}{2} e^{\rho^2} - \int \rho e^{\rho^2} d\rho$$

$$= \frac{\rho^2}{2} e^{\rho^2} - \frac{e^{\rho^2}}{2} + C$$

$$\int \cos^2\vartheta\, d\vartheta = \frac{\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta}{2} + C$$

$$= \left[\frac{\rho^2}{2}e^{\rho^2} - \frac{1}{2}e^{\rho^2}\right]_0^2 \left[\frac{\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$= \left(2e^4 - \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}}{2} - \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3e^4 + 1\right)\left(\frac{3}{8}\pi - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{\pi}{8} + \cancel{\frac{1}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3e^4+1\right)\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}\left(3e^4+1\right)$$